Ya. S. Bugrov
S. M. Nikolski

Matemáticas superiores
Cálculo diferencial e integral

Editorial
Mir
Moscú


ИЗДАТЕЛЬСТВО · МИР ·

Я. С. БУГРОВ, С. М. НИКОЛЬСКИЙ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

Ya. S. Bugrov
S. M. Nikolski

Matemáticas superiores

Cálculo diferencial e integral

Traducido del ruso
por el ingeniero K. Medkov



Editorial Mir Moscú

Impreso en la URSS

A NUESTROS LECTORES:

Mir edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción. Dirijan sus opiniones a la Editorial Mir, 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

На испанском языке

Índice

Capítulo 1

Introducción

§ 1.1. Asignatura de las matemáticas. Magnitudes variables y constantes, conjuntos

Entre todas las ciencias las matemáticas ocupan un lugar especial. Las matemáticas se definen como una ciencia sobre las formas espaciales y relaciones cuantitativas del mundo real. Si se toman en consideración el estado contemporáneo de las matemáticas y la diversidad de las estructuras que constituyen el objeto de su estudio, las formas espaciales y relaciones cuantitativas se deben entender, por supuesto, desde el punto de vista más general.

Las matemáticas ofrecen a otras ciencias un lenguaje numérico y simbólico para expresar toda una serie de relaciones que existen entre los fenómenos de la naturaleza. Mas, antes de recurrir al lenguaje matemático, un biólogo, un físico o un economista han de comprender profundamente la esencia del fenómeno que se analiza, descomponerlo en las partes que pueden ser tratadas matemátimente.

Los objetos de estudio en las propias matemáticas son los modelos lógicos construidos con el fin de describir los fenómenos de la naturaleza y de la sociedad. Las matemáticas investigan las relaciones existentes entre los elementos de los modelos mencionados. Si un modelo matemático refleja correctamente la esencia del fenómeno dado, permite también poner de manifiesto los lazos interiores lógicos que parecían ocultos al comienzo de la investigación, es decir, las matemáticas son capaces de descubrir, además, la faceta cualitativa de tal o cual fenómeno.

Por ser muy abstracto, un mismo modelo matemático puede describir los más diferentes procesos. Por ejemplo, una misma ecuación diferencial describe tanto el carácter de la desintegración radiactiva, como la variación de temperatura de un cuerpo humano.

Al estudiar los fenómenos de la naturaleza nos encontramos a cada paso con la variación de las magnitudes y con la dependencia de una magnitud de la otra. Por esta razón, el concepto de magnitud variable es fundamental en el análisis matemático.

Por *magnitud variable* (o simplemente variable) se entenderá aquella que en el proceso de estudio de un fenómeno cualquiera adquiere por lo menos dos valores distintos. Una magnitud que en el proceso de la investigación de una cuestión dada admite un solo valor, lleva el nombre de *constante*.

F. Engels ha notado que la aparición de la variable cartesiana introdujo en las matemáticas el movimiento y la dialéctica.

Al reunir todos los valores adquiridos por una magnitud variable, obtendremos el *conjunto* de valores de dicha magnitud.

El concepto de *conjunto* es también fundamental en las matemáticas; es un concepto sencillo y primario el que no se definirá en términos de otras nociones sencillas.

El *conjunto* es una totalidad o sea una reunión de ciertos entes de un género arbitrario.

Así por ejemplo, podemos hablar sobre el conjunto de estudiantes de un instituto, sobre el conjunto de moléculas en un cuerpo dado, sobre el conjunto de televisores en colores en una aula dada, etc. Los objetos que integran el conjunto dado se llamarán *elementos* del conjunto.

Los conjuntos se designarán, como siempre, mediante letras mayúsculas $A, B, \ldots, X, Y, \ldots$, y sus elementos con letras minúsculas $a, b, \ldots, x, y, \ldots$.

Si un elemento x pertenece al conjunto A, denotemos simbólicamente: $x \in A$. Si, en cambio, x no pertenece al conjunto A, se escribe: $x \notin A$. Mediante el símbolo $A \subset B$ (el conjunto A está incluido en el conjunto B) se denota la afirmación de que si $x \in A$, entonces $x \in B$.

El conjunto A en este último caso se denomina *subconjunto* del conjunto B. Se emplea también una inscripción equivalente $B \supset A$ (el conjunto B incluye en sí el conjunto A). Los símbolos $\subset$, $\supset$ reciben el nombre de *signos de inclusión*.

Si un conjunto no contiene ningún elemento, lo llaman *vacío* y denotan con el símbolo $\varnothing$. Está claro que $\varnothing \subset A$, donde A es un conjunto cualquiera.

Para designar los conjuntos son de amplio uso las llaves, dentro de las cuales se describen de tal o cual manera los elementos que forman parte de dichos conjuntos. La expresión $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ significa un conjunto de *números naturales*; $\{0, 1, 2, \ldots\}$ es un conjunto de números enteros no negativos, mientras que $\mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ es un *conjunto de todos los números enteros*. He aquí un ejemplo más: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0\}$ es un conjunto compuesto por las cifras del sistema decimal de numeración. Es evidente que $2 \in A$, mientras que: $\frac{1}{2} \notin A$.

Suele decirse que los conjuntos A y B *son iguales* y se escribe $A = B$, si $A \subset B$ y $B \subset A$. La respuesta a la pregunta de si son iguales los conjuntos dados no es siempre fácil. Por ejemplo, si $A = \{6, 8, 10, \ldots\}$ y $B = \{p + q\}$ es un conjunto de sumas de los números primos p y q, superiores a 2, entonces es obvio que $B \subset A$. Sin embargo, hasta ahora no se ha establecido todavía, si es cierto que $A \subset B$, es decir, si podemos representar un número entero

cualquiera $\geqslant 6$ como una suma de dos números primos superiores a dos.

En este curso trataremos, en lo principal, los conjuntos numéricos, es decir, los conjuntos cuyos elementos son los números.

§ 1.2. Operaciones sobre conjuntos

Para los conjuntos pueden introducirse las operaciones aritméticas de adición y multiplicación las cuales poseen las propiedades que son muy análogas a las propiedades correspondientes de las operaciones de adición y multiplicación de los números.

Sean dados dos conjuntos arbitrarios A y B. Se denomina *suma* o *unión* de los conjuntos A y B un conjunto C compuesto de los

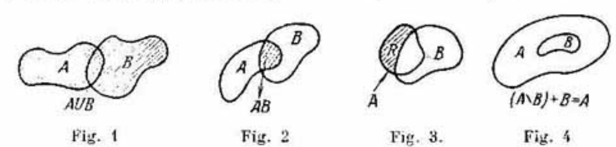


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3. Fig. 4

elementos de los conjuntos A y B en este caso se escribe: $C = A + B$, o bien $C = A \cup B$ (fig. 1). Es fácil ver que $A + A = A$.

Se llama *producto* o *intersección* de los conjuntos A y B un conjunto compuesto por los elementos que pertenecen simultáneamente tanto al conjunto A como al conjunto B. La intersección de los conjuntos se designa como AB o bien $A \cap B$ (fig. 2). Es evidente que $A \cap A = A$. Si $AB = \varnothing$, diremos que los conjuntos A y B no se intersecan. Haciendo uso del concepto de igualdad de los conjuntos, se puede demostrar que: 1) $A + B = B + A$, 2) $(A + B) C = AC + BC$, 3) $(AB) C = A (BC)$, 4) $(A + B) + C = A + (B + C)$. Demostremos, por ejemplo, 2). Si $x \in (A + B) C$, entonces, de acuerdo con la definición del producto, $x \in A + B$ y $x \in C$. De la definición de la suma proviene que $x \in A$, o bien $x \in B$. Supongamos, para concretar, que $x \in A$. En este caso $x \in AC$ y, por consiguiente, $x \in AC + BC$. Quiere decir, $(A + B) C \subset AC + BC$. Si ahora el elemento $x \in AC + BC$, se cumple por lo menos una de las relaciones $x \in AC$, $x \in BC$; sea, para concretar, $x \in AC$. Entonces, $x \in A + B$ y $x \in C$, es decir, $x \in (A + B) C$. De aquí $AC + BC \subset (A + B) C$. Con esta igualdad queda demostrada la 2).

Llamaremos *diferencia* de los conjuntos A y B un conjunto $R = A \setminus B$ compuesto de aquellos elementos de A que no pertenecen a B.

Observemos que en el caso general $(A \setminus B) + B \neq A$ (fig. 3). Pero, si $B \subset A$, entonces $(A \setminus B) + B = A$ (fig. 4).

Los conjuntos con las operaciones introducidas de adición y multiplicación forman un álgebra peculiar en la que no hay coeficientes y potencias.

§ 1.3. Símbolos de la lógica matemática

Con el fin de reducir las inscripciones se emplearán en adelante algunos símbolos lógicos más simples. Si para nosotros no es de interés la esencia de tal o cual afirmación, sino sí su relación con las otras afirmaciones, la primera se designará mediante una de las letras α, β, ... La inscripción $\alpha \Longrightarrow \beta$ significa: «de la afirmación α se deduce la afirmación β». Mediante el signo $\alpha \Longleftrightarrow \beta$ se designará el hecho de que las afirmaciones α y β son equivalentes, es decir, de α se deduce β y de β se deduce α.

La inscripción $\forall\, x \in A: \alpha$ significa que «para todo elemento $x \in A$ tiene lugar la afirmación α». El símbolo $\forall$ lleva el nombre de *cuantificador universal.*

La inscripción $\exists\, y \in B: \alpha$ significa que «existe un elemento $y \in B$, para el cual tiene lugar la afirmación β». El símbolo se denomina *cuantificador existencial.*

El símbolo $\overline{\alpha}$ se entenderá como *negación* de la afirmación α, o, brevemente, «no α».

Construyamos la negación de la afirmación $\forall x \in A : \alpha$.

Si dicha afirmación no tiene lugar, entonces la α tiene lugar no para todos los $x \in A$, es decir, existe un elemento $x \in A$, para el cual α no tiene lugar: $\overline{\forall x \in A : \alpha} \Longleftrightarrow \exists x \in A : \overline{\alpha}$. Análogamente: $\exists\, \overline{y \in B: \beta} \Longleftrightarrow \forall y \in B : \overline{\beta}$.

De este modo, para construir la negación de cierta fórmula lógica en la que se contienen los signos $\forall$ y $\exists$, es necesario sustituir el signo $\forall$ por $\exists$ y el signo $\exists$ por $\forall$, y, además, transferir la negación (la raya) a la propiedad que sigue tras dos puntos. Por ejemplo, la negación de la afirmación

$$\exists M,\ \forall x \in A:\ f(x) \leqslant M$$

tiene la forma

$$\overline{\exists M,\ \forall x \in A:\ f(x) \leqslant M} \Longleftrightarrow \forall M,\ \exists x \in A:\ \overline{f(x) \leqslant M} \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \forall M,\ \exists x \in A:\ f(x) > M.$$

§ 1.4. Números reales

El concepto de número es primario y fundamental en las matemáticas. Dicho concepto pasó un largo camino de desarrollo histórico. El conjunto de números reales

$$\mathbf{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\ \ldots\}$$

apareció en relación con la cuenta de los objetos. A continuación, bajo la influencia de las necesidades prácticas y del desarrollo de las propias matemáticas se han introducido los números enteros

$$\mathbf{Z} = \{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$$

y los racionales

$$Q = \{m/n\}, \quad \text{donde} \quad m, n \in \mathbf{Z}, \; n \neq 0.$$

Para conservar la uniformidad en la inscripción de un número racional convengamos en considerar que la fracción m/n es irreducible, si no se hacen indicaciones especiales con este motivo.

Sin embargo, la introducción de los números racionales no ha resuelto totalmente el problema práctico de importancia sobre la medición de segmentos. En efecto, existen los segmentos cuya longitud no es un número racional. A título de ejemplo puede servir la diagonal de un cuadrado cuyo lado es igual a la unidad.

En relación con lo dicho surgió la necesidad de introducir, además de los números racionales, otros números, *irracionales*. Los números arbitrarios, sean racionales o irracionales, se denominan *reales*. El conjunto de números reales se denota mediante **R**. Existen varios métodos para introducir (definir) los números reales. Nos detendremos en el método de representarlos en forma de las fracciones decimales infinitas

$$a = \pm a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots. \tag{1}$$

Aquí a_0 es un número entero no negativo, mientras que a_k son las cifras decimales. De este modo, a_k puede tomar sólo uno de los valores 0, 1, 2, . . ., 9. El signo $+$ se omite frecuentemente en las inscripciones de esta índole.

El número 0 (cero) se escribe en una de las siguientes formas:

$$0 = +0,00 \ldots = 0,00 \ldots = -0,00 \ldots.$$

Para representar un número racional, distinto de cero, $\pm m/n$ $(m > 0, \; n > 0)$ en forma de una fracción decimal, realicemos el proceso de división de m por n conforme al método estudiado en la escuela primaria:

$$m \,\underline{|\quad n \quad} \atop \quad a_0, a_1 a_2 \ldots \tag{2}$$

Hemos de notar que si este método se aplica a otra inscripción de la fracción $\pm mp/np = \pm m/n$ $(p > 0)$, se obtendrá el mismo resultado.

Suponemos

$$\pm \frac{m}{n} = \pm a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots \tag{3}$$

y llamaremos al segundo miembro de (3) *desarrollo decimal del número* $\pm m/n$.

Si el denominador de la fracción tiene la forma $n = 2^s 5^l$, donde s, l son ciertos números enteros no negativos, entonces el proceso (2) se da por terminado, realizados un número finito de pasos, y se

obtiene la *fracción decimal finita*

$$\pm\frac{m}{n}=\pm a_0,a_1\ \dots\ a_M=\pm a_0,a_1\ \dots\ a_M00\ \dots\ (a_M>0). \quad (4)$$

Se emplea también otra representación de la fracción finita (4):

$$\pm a_0,a_1\ \dots\ a_M=\pm a_0,a_1\ \dots\ a_{M-1}(a_M-1)\,99\ \dots =$$
$$=\pm a_0,a_1\ \dots\ a_{M-1}(a_M-1)\,(9), \quad (5)$$

aunque dicha representación no proviene del proceso (2). La representación en el segundo miembro de (5) es una *fracción decimal infinita*.

Una fracción decimal

$$\beta_0,\beta_1\beta_2\ \dots$$

se denominará *infinita*, siempre que para cualquier n natural existe tal k natural ($k>n$) que la cifra β_k, que ocupa el k-ésimo lugar tras la coma, es superior a cero.

Subrayemos que una fracción decimal de la forma $\pm a_0,a_1\ \dots\ \dots\ a_m00\ \dots$, la llamaremos *finita*. Cada fracción decimal finita puede ser representada, al aprovechar el método (5), en forma de una fracción decimal infinita. Las otras fracciones decimales, las cuales se tratarán en lo que sigue, definirán otros números.

Supongamos ahora que el denominador de nuestra fracción no es de la forma 2^s5^t. El proceso (2) será en este caso infinito: en cualquier paso surge un resto positivo. Todo resto es inferior a n, razón por la cual (después de haber agotado todas las cifras del número m) ya entre los primeros n restos por lo menos dos de ellos resultarán ser iguales entre sí. Pero, tan pronto como surja un resto que ya se observó antes, el proceso se hace reiterado, es decir, *periódico*. Por esta razón el desarrollo decimal de un número racional arbitrario tiene por expresión

$$\pm\frac{m}{n}=\pm a_0,a_1\ \dots\ a_Mb_1\ \dots\ b_sb_1\ \dots\ b_s\ \dots =$$
$$=\pm a_0,a_1\ \dots\ a_M(b_1\ \dots\ b_s)\quad (s<n). \quad (6)$$

El desarrollo (5) puede considerarse como un caso particular de (6).

Ejemplos:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{6}=0{,}166\ \dots=0{,}1\,(6),\quad \frac{1}{7}=0,\ (142857),\\&\frac{2}{9}=0{,}22\ \dots=0,(2),\\&\frac{7}{99}=0{,}0707\ \dots=0,(07),\\&\frac{7}{990}=0{,}00707\ \dots=0{,}0\,(07).\end{aligned}\right\}\quad (7)$$

El desarrollo del tipo (6) lleva el nombre de *fracción periódica decimal infinita*.

Así pues, todo número racional distinto de cero puede desarrollarse, con ayuda del proceso (2) (y, en el caso (4), también mediante el proceso (5)), en una fracción periódica decimal infinita. Se puede demostrar en tal caso que a los números racionales diferentes les corresponden distintos desarrollos decimales infinitos. Viceversa, cualquier fracción periódica infinita (6) se engendra, con ayuda de los procesos mencionados (2) y (5), por cierto número racional que se calcula según la fórmula

$$\pm\frac{m}{n}=\pm\left[a_0,a_1\,\ldots\,a_M+\frac{\beta_1\ldots\beta_s}{9\ldots9}10^{-M}\right].$$

Aquí nos hemos permitido designar por medio de $\beta_1\ldots\beta_s$ y $\underbrace{9\ldots9}_{s\text{ veces}}$ un número entero escrito por las cifras $\beta_1\ldots\beta_s$ y $\underbrace{9,\ldots,9}_{s\text{ veces}}$, respectivamente.

Por ejemplo,

$$1{,}237\,(06)=1{,}237+0{,}000\,(06)=1{,}237+\frac{06}{99}10^{-3}=1{,}237+\frac{6}{99000}.$$

Además de las fracciones decimales periódicas existen también fracciones aperiódicas, por ejemplo, 0,1010010001 . . .; 0,121122111222 . . . .

He aquí un ejemplo más: al extraer la raíz cuadrada de 2 de acuerdo con la regla conocida, obtendremos cierta fracción decimal aperiódica infinita $\sqrt{2}=1{,}41\ldots$. Esta fracción está definida en el sentido de que a todo número natural k le corresponde una cifra determinada α_k que ocupa el k-ésimo lugar tras la coma y se calcula unívocamente de conformidad con la regla para extraer la raíz cuadrada.

El análisis matemático proporciona varios métodos para calcular el número π con cualquier precisión prefijada de antemano. Esto conduce a un desarrollo decimal infinito bien determinado de π, el cual, como resulta, no es una fracción decimal periódica mixta.

Demos ahora la definición del número irracional, esta vez, netamente formal. *Se denomina número irracional una fracción aperiódica infinita arbitraria*

$$a=\pm\alpha_0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots,\qquad(8)$$

donde α_0 *es un número entero no negativo y* α_k $(k=1,2,\ldots)$ *son las cifras; el signo de igualdad «=» significa que el segundo miembro de* (8) *se ha designado mediante* a. Por otra parte, resulta conveniente decir que el segundo miembro de (8) es un desarrollo decimal del número a.

Los números racionales e irracionales llevan el nombre de números reales.

De lo dicho se infiere que *todo número real distinto de cero puede escribirse en forma de la fracción decimal infinita* (8). *Si el número citado es racional, su desarrollo decimal será una fracción decimal periódica infinita. En el caso contrario, de acuerdo con nuestra definición, la propia expresión* (8) *determina un número irracional.*

Una *fracción decimal distinta de cero* puede ser finita, pero ella no determina un nuevo número racional: en virtud de la representación expresada por la igualdad (5) puede ser sustituida por una fracción periódica infinita igual a la primera.

El número a, en el que no todas las α_k son nulas, se denomina positivo o negativo en dependencia del signo «+» o «−» que figura en (8); en este caso, como siempre, el signo «+» se omitirá.

Los números reales se han definido hasta ahora del modo formal; resta definir, además, las operaciones aritméticas con ellos, introducir para los mismos el concepto «>», y comprobar que dichas operaciones y el concepto «>» concuerdan con las operaciones y el concepto «>» correspondientes que ya conocimos para los números racionales y cerciorarse de que los números reales satisfacen las propiedades que exigimos de los números en general.

§ 1.5. Definiciones de la igualdad y de la desigualdad

Sean dados dos números $a = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots$, $b = \pm\beta_0, \beta_1\beta_2 \ldots$, definidos mediante las fracciones decimales *infinitas.* Convengamos en considerar que dichos números *son iguales* entre sí cuando, y sólo cuando, son iguales sus signos y

$$\alpha_k = \beta_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Supongamos que los números a y b son positivos. Por definición, $a < b$ o bien, que es lo mismo, $b > a$, si $\alpha_0 < \beta_0$, o si existe tal índice (un número entero no negativo) l que $\alpha_k = \beta_k$ $(k = 0, 1, \ldots, l)$ y $\alpha_{l+1} < \beta_{l+1}$.

Si las fracciones decimales infinitas a y b tienen la forma

$$a = \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_N 99 \ldots \quad (\alpha_N < 9), \tag{1}$$
$$b = \beta_0, \beta_1 \ldots \beta_N 99 \ldots \quad (\beta_N < 9),$$

se pueden escribir como fracciones decimales finitas

$$\left.\begin{aligned} a &= \alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_{N-1}(\alpha_N + 1), \\ b &= \beta_0, \beta_1 \ldots \beta_{N-1}(\beta_N + 1). \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

No es difícil ver que si $a = b$ o $a < b$ en el sentido aducido anteriormente (en el lenguaje de las fracciones decimales infinitas (1)), entonces $a = b$ o $a < b$, respectivamente, en el sentido de la igualdad ($a = b$) o desigualdad ($a < b$) de las fracciones decimales finitas (1′).

Por definición, $a > 0$ o $a < 0$, según sea a positivo o negativo luego, por definición, $a < b$, si $a < 0$, $b > 0$, o bien si a, $b < 0$ y $|a| > |b|$.

Si $a = \pm\alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots$, entonces según la definición $-a = \mp\alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots$ y la magnitud absoluta $|a| = +\alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots$ Así pues,

$$|-a| = |a| = \begin{cases} a \ (a \geqslant 0), \\ -a \ (a \leqslant 0). \end{cases}$$

Según se sabe por el curso escolar de las matemáticas, entre los números reales y los puntos de cierta recta puede establecerse una correspondencia biunívoca ($\leftrightarrow$) de conformidad con la siguiente regla. Al número 0 se le pone en correspondencia un punto arbitrario O en la recta, llamado punto nulo, y viceversa. La longitud de cierto segmento se considera igual a la unidad. A cada número real $\pm a$ ($a > 0$) se le pone en correspondencia un punto de la recta el cual dista del punto nulo a la magnitud a, a la derecha del punto O para el número $+a$ y a la izquierda del punto O para el número $-a$ (fig. 5). Viceversa, si A es un punto arbitrario de la recta que está a la distancia a a la derecha de O, se considera que dicho punto corresponde al número real $+a$ (a una fracción decimal infinita). En cambio, si el punto A está a la izquierda respecto del punto O, corresponde al número $-a$. La recta en consideración se llamará *recta numérica* o eje real. En lo que sigue los puntos de la recta numérica se identificarán con los números reales que les corresponden a dichos puntos, es decir, los propios puntos se llamarán números correspondientes. Ha de notarse que la distancia entre los puntos a y b es igual a $|a - b|$ (véase en el § 1.6 la definición de diferencia).

Fig. 5

§ 1.6. Definición de las operaciones aritméticas

Supongamos que a todo número entero no negativo (*índice*) n se le ha puesto en correspondencia, en virtud de cierta ley, un número x_n. El conjunto

$$x_0, x_1, x_2, \ldots \qquad (1)$$

se denomina *sucesión* (de los números). Los números aislados x_n llevan el nombre de *elementos* de la sucesión (1). Los elementos x_n y x_m se consideran distintos para $m \neq n$ como los elementos de la sucesión, aunque no se excluye que, como números, son iguales entre sí ($x_n = x_m$).

Una *sucesión* se llama *no decreciente* (*no creciente*), siempre que $x_k \leqslant x_{k+1}$ ($x_k \geqslant x_{k+1}$) para todo $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Diremos que la *sucesión* (1) *está acotada superiormente* (*por el número M*), si existe tal número M que $x_k \leqslant M$, cualquiera que sea $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Si los números x_k de la sucesión (1) son enteros, diremos que la sucesión *se estabiliza* hacia el número ξ, siempre que existe tal k_0 que $x_k = \xi$ para cualquier $k > k_0$, y se escribirá $x_k \rightrightarrows \xi$.

LEMA 1. *Si la sucesión de números enteros no decrece y está acotada superiormente por el número M, ella se estabiliza hacia cierto número $\xi \leqslant M$.*

Demostración. Aunque la cantidad de elementos de nuestra sucesión es infinita, ésta recorre un número *finito* de números enteros: los números mencionados no son superiores a M. Sea ξ el máximo entre estos números. De este modo, $\xi \leqslant M$ y existe tal s natural, para el cual $x_s = \xi$. Pero, nuestra sucesión no es decreciente, por lo cual $x_k = x_s$ para todo $k \geqslant s$, es decir, la sucesión se estabiliza hacia el número ξ ($x_n \rightrightarrows \xi \leqslant M$).

Examinemos ahora una sucesión de fracciones decimales no negativas (sólo finitas o sólo infinitas):

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \alpha_{10},\alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\ldots, \\ a_2 &= \alpha_{20},\alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\ldots, \\ a_3 &= \alpha_{30},\alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{33}\ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Los segundos miembros en (2) forman una tabla (*matriz infinita*).

Diremos que la *sucesión* (2) *se estabiliza hacia el número* $a = \gamma_0,\gamma_1\gamma_2\ldots$, y se escribirá

$$a_n \rightrightarrows a, \tag{3}$$

siempre que la k-ésima columna de la tabla (2) *se estabiliza hacia* γ_k, *cualquiera que sea* $k = 0, 1, 2, \ldots$, es decir, $\alpha_{sk} \rightrightarrows \gamma_k$ para todo k fijo.

LEMA 2. *Si la sucesión no decreciente* (2) *de fracciones decimales (sólo finitas o sólo infinitas) está acotada superiormente por el número M, se estabiliza a ciencia cierta hacia cierto número a que satisface las desigualdades*

$$a_n \leqslant a \leqslant M \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

En efecto, en las condiciones del lema los números enteros de la columna nula de la matriz (2)

$$\alpha_{10}$$
$$\alpha_{20}$$
$$\alpha_{30}$$
$$\cdots$$

tampoco decrecen y están acotados superiormente por el número M (véase § 1.5), razón por la cual, de acuerdo con el lema 1, se estabilizan hacia cierto número entero no negativo $\gamma_0 \leqslant M$. Supongamos que esta estabilización tiene lugar a partir del número n_0, es decir $a_n = \gamma_0, \alpha_{n1}\alpha_{n2} \ldots \leqslant M$, $n \geqslant n_0$.

Demostremos ahora que la primera columna en (2)

$$\alpha_{11}$$
$$\alpha_{21}$$
$$\alpha_{31}$$
$$\cdots$$

también se estabiliza hacia cierta cifra γ_1 y tiene lugar la desigualdad

$$\gamma_0, \gamma_1 \leqslant M.$$

Efectivamente, por cuanto los desarrollos de los números a_n (con $n \geqslant n_0$) tienen la forma

$$\gamma_0, \alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3} \ldots \leqslant M \quad (n \geqslant n_0)$$

y, además, a_n no decrece, entonces para los n mencionados las cifras de la primera columna α_{n1} ($\leqslant 9$) tampoco decrecen y, por consiguiente, se estabilizan hacia cierta cifra γ_1, de conformidad con el lema 1. Supongamos que esta segunda estabilización viene a partir del número $n_1 > n_0$, es decir, para $n \geqslant n_1$

$$a_n = \gamma_0, \gamma_1\alpha_{n2}\alpha_{n3} \ldots \leqslant M.$$

Es obvio en este caso que

$$\gamma_0, \gamma_1 \leqslant a_n \leqslant M \quad (n \geqslant n_1).$$

Razonando ahora por inducción, admitamos ya demostrada la afirmación de que las columnas de la matriz (2) con números no superiores a k se estabilizan hacia $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k$, respectivamente, y $\gamma_0, \gamma_1 \ldots \gamma_k \leqslant M$ ($\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ son las cifras). (5)

Demostremos que la $(k+1)$-ésima columna en (2) se estabiliza también hacia cierta cifra γ_{k+1} y tiene lugar la desigualdad

$$\gamma_0, \gamma_1 \ldots \gamma_k\gamma_{k+1} \leqslant M. \quad (6)$$

En efecto, por cuanto los desarrollos decimales de los números a_n (con $n \geqslant n_k$) tienen la forma

$$a_n = \gamma_0,\gamma_1 \ldots \gamma_k\alpha_{n,\,k+1}\alpha_{n,\,k+2} \ldots \leqslant M$$

y, además, a_n no decrece, entonces para los n mencionados las cifras $\alpha_{n,\,k+1}$ ($\leqslant 9$) no decrecen y, por lo tanto, se estabilizan (con $n \geqslant n_{k+1}$), donde n_{k+1} es suficientemente grande) hacia cierta cifra γ_{k+1}. Es obvio en este caso que

$$\gamma_0,\gamma_1 \ldots \gamma_{k+1} \leqslant a_n \leqslant M \quad (n \geqslant n_{k+1}),$$

con lo que se considera demostrada la desigualdad (6). De conformidad con el método de inducción matemática concluimos que (5) se verifica con k cualquiera y que $a_n \rightrightarrows a = \gamma_0,\gamma_1\gamma_2 \ldots$.

Demostremos la primera desigualdad de (4). Comparemos los números

$$a_n = \alpha_{n0},\alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3}, \ldots,$$
$$a = \gamma_0,\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \ldots .$$

Si todos los componentes correspondientes de ambos desarrollos son iguales ($\alpha_{ns} = \gamma_s$, $s = 0, 1, 2, \ldots$), entonces $a_n = a$. De lo contrario para cierto s se tiene

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha_{nj} = \gamma_j & (j = 0, 1, \ldots, s-1), \\ \alpha_{ns} < \gamma_s. & \end{array}\right\} \qquad (7)$$

En este caso, si $s = 0$, las igualdades en (7) se deben omitir. Para n en consideración los números $\alpha_{nj} = \gamma_j$ ($j = 0, 1, \ldots, s-1$) ya están estabilizados, por lo cual

$$a_n \leqslant \alpha_{n0},\alpha_{n1} \ldots \alpha_{n,\,s-1}(\alpha_{ns}+1) = \gamma_0,\alpha_1 \ldots$$
$$\ldots \gamma_{s-1}(\alpha_{ns}+1) \leqslant \gamma_0,\gamma_1 \ldots \gamma_{s-1}\gamma_s \leqslant a,$$

y queda demostrada, pues, la primera desigualdad de (4).

Resta por demostrar la segunda desigualdad de (4). Si $a = \gamma_0,\gamma_1 \ldots \gamma_N$ es una fracción decimal finita, ella proviene de (5) cuando $k = N$. Sea ahora

$$a = \gamma_0,\gamma_1\gamma_2 \ldots$$

una fracción decimal infinita. Desarrollemos el número M también en una fracción infinita $M = m_0, m_1m_2 \ldots$. Si admitimos que la desigualdad que se demuestra no es cierta, se encontrará tal k que

$$\left.\begin{array}{ll} \gamma_j = m_j & (j = 0, 1, \ldots, k-1), \\ \gamma_k > m_k. & \end{array}\right\} \qquad (9)$$

Si $k = 0$, las igualdades en (9) se omiten. Puesto que el desarrollo (8) es infinito, se encontrará tal s que $\gamma_{k+s} > 0$. Por ello

$$\gamma_0, \gamma_1 \ldots \gamma_{k-1}\gamma_k \ldots \gamma_{k+s} > \gamma_0, \gamma_1 \ldots \gamma_{k-1}\gamma_k =$$
$$= m_0, m_1 \ldots m_{k-1}\gamma_k \geqslant m_0, m_1 \ldots m_{k-1}(m_k+1) =$$
$$= m_0, m_1 \ldots m_{k-1}m_k 99 \ldots \geqslant m_0, m_1m_2 \ldots = M$$

y se ha obtenido la contradicción con la desigualdad (5).

Ahora ya tenemos la posibilidad de definir las operaciones aritméticas sobre los números reales.

Para un número arbitrario $a = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2$ introduzcamos su n-ésimo *truncamiento* $a^{(n)} = \alpha_0,\alpha_1 \ldots \alpha_n$ que representa una fracción decimal. Consideramos que las operaciones sobre fracciones decimales son conocidas al lector.

Prefijemos dos números positivos

$$a = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots, \quad b = \beta_0,\beta_1\beta_2 \ldots,$$

desarrollados en las fracciones decimales infinitas. Introduzcamos una sucesión de números

$$a^{(n)} + b^{(n)} = \alpha_0,\alpha_1 \ldots \alpha_n + \beta_0,\beta_1 \ldots \beta_n = \\ = \lambda_0^{(n)},\lambda_1^{(n)} \ldots \lambda_n^{(n)} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Evidentemente, esta sucesión no decrece y, en adición, está acotada superiormente:

$$a^{(n)} + b^{(n)} \leqslant (\alpha_0 + 1) + (\beta_0 + 1) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Pero, en este caso, en virtud del lema 2, los desarrollos decimales de nuestra sucesión se estabilizan hacia cierta fracción decimal $\gamma_0,\gamma_1\gamma_2 \ldots$, la cual es un número real. Este último número se denomina, por definición, *suma de los números a y b*:

$$a + b = \gamma_0,\gamma_1\gamma_2 \ldots .$$

Así pues, definimos la suma $a + b$ como un número hacia el cual se estabiliza la sucesión $a^{(n)} + b^{(n)}$:

$$a^{(n)} + b^{(n)} \rightleftarrows a + b. \tag{10}$$

Con el objeto de definir el producto de números reales a y b, introduzcamos un número truncado

$$(a^{(n)}b^{(n)})^{(n)} = \mu_0^{(n)},\mu_1^{(n)} \ldots \mu_n^{(n)} \tag{11}$$

que es una fracción decimal. Es evidente que la sucesión de estos truncamientos no decrece (¡al crecer n!) y está acotada superiormente:

$$(a^{(n)}b^{(n)})^{(n)} \leqslant (\alpha_0 + 1)(\beta_0 + 1) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Por eso, de acuerdo con el lema 2, la expresión (11) se estabiliza hacia cierto número el cual se llama precisamente *producto* ab:

$$(a^{(n)}b^{(n)})^{(n)} \rightleftarrows ab.$$

Prestemos nuestra atención a las desigualdades

$$a^{(n)} = \alpha_0,\alpha_1 \ldots \alpha_n \leqslant \alpha_0,\alpha_1 \ldots \alpha_n \ldots \\ \leqslant \alpha_0,\alpha_1 \ldots \alpha_n 99 \ldots = \alpha_0,\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1} (\alpha_n + 1) = \\ = \alpha_0,\alpha_1 \ldots \alpha_n + 10^{-n},$$

es decir,

$$a^{(n)} \leqslant a \leqslant a^{(n)} + 10^{-n}$$

La magnitud $a^{(n)}$ se aproxima hacia a (al crecer n) sin decrecer. En lo que se refiere a la magnitud $a^{(n)} + 10^{-n}$, ésta se aproxima hacia a sin crecer:

$$a^{(n)} + 10^{-n} = \alpha_0,\alpha_1 \ldots \alpha_n 99 \ldots \geqslant \alpha_0,\alpha_1 \ldots$$
$$\ldots \alpha_n\alpha_{n+1}99 \ldots = a^{(n+1)} + 10^{-(n+1)}.$$

Esta circunstancia se aprovechará al definir la diferencia y el cociente de los números positivos.

Si $a > b > 0$, entonces la *diferencia* $a - b$ se define como una fracción decimal (un número), hacia la cual se estabiliza la sucesión de fracciones decimales finitas:

$$a^{(n)} - (b^{(n)} + 10^{-n}) \rightrightarrows (a - b); \qquad (12)$$

si, a, $b > 0$, entonces el *cociente* a/b se define como una fracción decimal, hacia la cual se estabiliza la sucesión de fracciones finitas.

$$\left(\frac{a^{(n)}}{b^{(n)}+10^{-n}}\right)^{(n)} \rightrightarrows \frac{a}{b}. \qquad (13)$$

Se debe tener en cuenta que $a^{(n)}$ no decrece al crecer n, mientras que $b^{(n)} + 10^{-n}$ no crece, por lo cual las expresiones a la izquierda en (12) y (13) no decrecen. Además, están acotadas superiormente:

$$a^{(n)} - (b^{(n)} + 10^{-n}) \leqslant \alpha_0 + 1,$$
$$\left(\frac{a^{(n)}}{b^{(n)}+10^{-n}}\right)^{(n)} \leqslant \frac{\alpha_0+1}{\beta_0,\beta_1 \ldots \beta_s},$$

donde s es tal que $\beta_s > 0$. Por esto, según el lema 2, las expresiones a la izquierda en (12) y (13) realmente se estabilizan.

Hagamos además:

$$0 + a = a \pm 0 = a,\ a \cdot 0 = 0 = a - a = \frac{0}{b}\ (a \geqslant 0,\ b > 0). \qquad (14)$$

Para los números no negativos a, b hemos definido suma, diferencia, producto y cociente suyos, suponiendo para el caso de la diferencia que $a \geqslant b$, y para el caso del cociente que $b > 0$. Estas definiciones se extienden de un modo corriente a los numeros a y b de signos arbitrarios. Por ejemplo, si a, $b \leqslant 0$ suponemos $a + b = b + a = -(|a| + |b|)$. En cambio, si a y b son unos números de signos opuestos y $|a| \geqslant |b|$, suponemos $a + b = b + a = \pm(|a| - |b|)$, donde el signo se elige de tal modo que sea igual al de a. En particular, cualquiera que sea a, se verifica

$$a + (-a) = 0.$$

Las reglas semejantes se podrían aducir para las demás operaciones aritméticas, pero esto no es necesario pues están bien conocidas por el curso del álgebra.

En el § 1.7 se indican las propiedades de los números reales que se deducen de las definiciones aducidas. Más abajo enunciamos dichas propiedades. Se puede demostrarlas, pero las demostraciones de realizan sólo en algunos casos [1]. Las propiedades mencionadas se reúnen en cinco grupos (I—V). Los primeros tres grupos contienen propiedades elementales, por las cuales nos regimos realizando cálculos aritméticos y resolviendo las desigualdades. El grupo IV está constituido por una propiedad (de Arquímedes). Por fin, el grupo V lo constituye también una propiedad. Esta última se enuncia en el lenguaje de límites. Será demostrada un poco más abajo (en el § 2.5).

§ 1.7. Propiedades fundamentales de los números reales

I. PROPIEDADES DEL ORDEN.

I_1. Para cada par de números reales a y b tiene lugar una, y sólo una, relación:

$$a = b, \ a > b; \ a < b.$$

I_2. De lo que $a < b$ y $b > c$ se deduce $a < c$ (propiedad transitiva del signo «$<$»).

I_3. Si $a < b$, existe tal número c que $a < c < b$.

II. PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES DE ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN.

II_1. $a+b=b+a$ (propiedad conmutativa).

II_2. $(a+b)+c=a+(b+c)$ (propiedad asociativa).

II_3. $a+0=a$.

II_4. $a+(-a)=0$.

II_5. De lo que $a<b$ proviene $a+c<b+c$ para c cualquiera.

Es natural llamar el número $a+(-b)$ diferencia $a-b$, es decir, escribir $a-b=a+(-b)$, porque si lo añadimos a b, obtendremos a:

$$[a+(-b)]+b=a+[(-b)+b]=a+0=a.$$

De las propiedades aducidas se deduce con facilidad que la diferencia es única. Se puede demostrar que una diferencia definida de este modo coincide con la diferencia definida por la fórmula (12) del § 1.6.

[1] Véase, por ejemplo, la demostración completa en el manual de S. M. Nikolski «Análisis matemático», t I, cap. 2.

III. PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES DE MULTIPLICACION Y DIVISIÓN.

III_1. $ab = ba$ (propiedad conmutativa).
III_2. $(ab)c = a(bc)$ (propiedad asociativa).
III_3. $a \cdot 1 = a$.
III_4. $a \cdot \frac{1}{b} = 1$ $(a \neq 0)$.
III_5. $(a + b)\,c = ac + bc$ (ley distributiva).
III_6. De lo que $a < b$, $c > 0$ se deduce que $ac < bc$.

Es natural llamar el número $a \cdot \frac{1}{b}$ $(b \neq 0)$ cociente $\frac{a}{b}$ $\left(\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}\right)$, porque si lo multiplicamos por b, obtendremos a:

$$\left(a \cdot \frac{1}{b}\right) b = a\left(\frac{1}{b} \cdot b\right) = a\left(b \cdot \frac{1}{b}\right) = a \cdot 1 = a.$$

De las propiedades aducidas proviene con facilidad que el cociente de la división de a por b es único. Se puede demostrar que el cociente definido de este modo coincide con el cociente definido mediante la fórmula (13) del § 1.6.

IV. PROPIEDAD DE ARQUÍMEDES.

Cualquiera que sea el número $c > 0$, existe un número natural $n > c$. Efectivamente, si $c = \alpha_0,\alpha_1\alpha_2 \ldots$, se puede tomar $n = \alpha_0 + 2$.

De la propiedad de Arquímedes y ciertas propiedades anteriores se deduce que cualquiera que sea un número positivo ε, siempre puede indicarse un número natural n tal que se cumpla la desigualdad $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

En efecto, de acuerdo con IV, para el número $1/\varepsilon$ puede encontrarse un n natural tal que $1/\varepsilon < n$, lo que, en virtud de III_6, lleva consigo la desigualdad requerida.

Observemos que para el número dado $c \geqslant 0$ en la serie $0, 1, 2, \ldots$ de números enteros no negativos se tiene, evidentemente, un único número m, para el cual se verifican las desigualdades $m \leqslant c < m + 1$.

PROPIEDAD V. *Si una sucesión de números reales $a_1, a_2, a_3, \ldots$ no decrece y está acotada superiormente por el número M $(a_n \leqslant M)$, existe un número $a \leqslant M$, al cual dicha sucesión tiende teniéndolo como su límite*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \leqslant M.$$

Esto significa que para todo número positivo $\varepsilon > 0$, tan pequeño como se quiera, se encontrará un número natural n_0 tal que

$$|\, a - a_n \,| = a - a_n < \varepsilon$$

para todos los $n > n_0$.

La demostración se da en el § 2.5, teorema 1. Según veremos, la propiedad V es el corolario inmediato del lema 2 del § 1.6, en el que se afirmaba, en particular, que una sucesión de fracciones decimales infinitas que no decrece y está acotada superiormente por el número M se estabiliza hacia cierta fracción decimal $a \leqslant M$ ($a_n \rightrightarrows a$).

El hecho es que de lo que a_n se estabiliza hacia a se deduce que a_n tiende hacia a teniéndolo por su límite.

§ 1.8. Acceso axiomático al concepto de número real

Las fracciones decimales infinitas se han llamado números reales; nosotros introducimos para éstos los conceptos de 0, 1, $>$, $=$, las operaciones aritméticas y enunciamos sus propiedades fundamentales I—V las cuales pueden demostrarse.

Cabe decir que las propiedades I—V se han seleccionado de una manera económica y completa, de suerte que basándose en ellas pueden obtenerse todas las demás propiedades de los números.

Existe un acceso axiomático a la definición de un número real consistente en que el nombre de números reales se asigna a ciertos objetos (piezas) a, b, c, . . ., que satisfacen las propiedades I—V. Empleado tal acceso, las propiedades I—V se denominan *axiomas del número*.

Las formulaciones de las propiedades en este caso (esto es, las formulaciones de los axiomas) han de ser un tanto modificadas. Los axiomas II se enuncian ahora del modo siguiente: a cada par de números le corresponde, en virtud de cierta ley, un número $a + b$, denominado suma de ellos, con la particularidad de que se cumplen en este caso los axiomas II_1—II_5. El axioma II_3 debe enunciarse ahora en la forma siguiente: existe un número 0 (cero) tal que $a + 0 = a$ para todo a. El axioma II_4 se enuncia así: para cualquier número a existe un número, denotado con $-a$, tal que $a + (-a) = 0$. Por fin, el axioma III_3 adquiere la forma siguiente: existe un número 1 (unidad), distinto de 0 (cero), tal que $a \cdot 1 = a$ para todo a.

Designemos mediante **R** el conjunto de todos los números reales, es decir, de todos los objetos que obedecen a los axiomas I—V. En este caso en **R** se tienen el cero (0) y la unidad (1). Valiéndose de los axiomas, se puede demostrar que $0 < 1$, y, además, tienen sentido los números $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, . . . y los números -1, -2, -3, ... De resultas, se obtendrá un conjunto de todos los números enteros (¡distintos uno del otro!)

$$\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots .$$

En virtud de los axiomas, estos números pueden dividirse uno por otro, excluyendo la división por 0. Por esta razón **R** contiene

números racionales $\pm m/n = \pm mp/np$ $(n > 0,\ m \geqslant 0,\ p \neq 0)$. Mas, en este caso en R hay también fracciones decimales finitas. De las últimas pueden construirse unas sucesiones no decrecientes acotadas superiormente. Debido al axioma V, en R deben existir los límites de tales sucesiones. Algunos de dichos límites no son fracciones decimales finitas: son los números distintos de las fracciones decimales finitas. Resulta más cómodo escribirlos en forma de las fracciones decimales infinitas. De resultas, con ayuda de los razonamientos lógicos podemos llegar, partiendo de los axiomas, a las fracciones decimales infinitas. Por supuesto, hemos mostrado aquí sólo un esquema de los razonamientos que no pretende servir de demostración.

De lo dicho se infiere que desde el punto de vista formal es igual, si nos partimos, al definir los números reales, de las fracciones decimales infinitas o del acceso axiomático.

Naturalmente, desde el punto de vista filosófico, el segundo acceso parece más admisible: los números son en esencia unas abstracciones que expresan relaciones cuantitativas del mundo real, mientras que las fracciones decimales son símbolos formales que los representan.

§ 1.9. Desigualdades para las magnitudes absolutas

La desigualdad

$$|a| < \varepsilon \tag{1}$$

es equivalente a dos igualdades

$$-\varepsilon < a < \varepsilon. \tag{1'}$$

De aquí, la desigualdad

$$|a - b| < \varepsilon \tag{2}$$

es equivalente a las desigualdades

$$b - \varepsilon < a < b + \varepsilon. \tag{2'}$$

Análogamente, la desigualdad

$$|a - b| \leqslant \varepsilon \tag{3}$$

es equivalente a las desigualdades

$$b - \varepsilon \leqslant a \leqslant b + \varepsilon.$$

Son verídicas también las desigualdades

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|, \tag{4}$$

$$|a - b| \geqslant ||a| - |b||. \tag{5}$$

La desigualdad (4) puede obtenerse al examinar por separado cuatro casos: 1) $a,b \geqslant 0$, 2) $a,b \leqslant 0$, 3) $a \leqslant 0 \leqslant b$, 4) $b \leqslant 0 \leqslant a$. Por ejemplo, en el caso 2)

$$a + b \leqslant b \leqslant 0, \quad |a + b| = -(a + b) = -a - b = |a| + |b|,$$

y en el caso 3), si admitimos que $|b| \geqslant |a|$,

$$|a + b| = b + a \leqslant |a| + |b|.$$

El caso 3), con la admisión de que $|b| \leqslant |a|$, se examinará por el mismo lector, al igual que el caso 1). El caso 4) se reduce al caso 3). Luego, en virtud de (4),

$$|a| \leqslant |b| + |a - b|, \quad |b| \leqslant |a| + |a - b|,$$

es decir,

$$|a| - |a - b| \leqslant |b| \leqslant |a| + |a - b|,$$

pero, entonces es cierta (5).

§ 1.10. Segmento, intervalo, conjunto acotado

Supongamos que los números (puntos) a y b satisfacen la desigualdad $a < b$.

Un conjunto de números x que satisfacen las desigualdades $a \leqslant x \leqslant b$, se denomina *segmento* (con los extremos a, b) y se denota $[a, b]$.

Un conjunto de números x que satisfacen las desigualdades $a < x < b$, se denomina *intervalo* (con los extremos a, b) o bien *segmento abierto* y se designa (a, b).

Los conjuntos de números x que satisfacen las desigualdades $a \leqslant x < b$ ó $a < x \leqslant b$, se designan $[a, b)$, $(a, b]$, respectivamente, y se llaman *segmentos semiabiertos* o *semiintervalos*. El primero, por ejemplo, *está cerrado* a la izquierda y *abierto*, a la derecha.

Se examinan a menudo los conjuntos llamados *intervalos infinitos* o *semiintervalos infinitos*: 1) $(-\infty, \infty)$, 2) $(-\infty, a]$, 3) $(-\infty, a)$, 4) (a, ∞), 5) $[a, \infty)$.

El primero de ellos es un conjunto de todos los números reales (recta real); los restantes se componen de todos los números, para los cuales: 2) $x \leqslant a$. 3) $x < a$, 4) $a < x$, 5) $a \leqslant x$, respectivamente.

Es conveniente llamar los símbolos $-\infty$ y $+\infty$ *números infinitos*, y los números corrientes, *números finitos*.

Subrayemos que los extremos del segmento $[a, b]$ son números finitos, mientras que los «extremos» del intervalo (a, b) pueden ser tanto finitos como infinitos. El número a del semiintervalo $[a, b)$ es siempre finito y b puede ser finito e infinito ($b \leqslant \infty$). Análoga-

mente, el número a del semi-intervalo $(a, b]$ es finito o infinito ($-\infty \leqslant a$), mientras que b es siempre finito.

Si a y b son finitos y, además, $a < b$, entonces el número $b - a$ recibe el nombre de *longitud* del segmento $[a, b]$ o bien del intervalo (a, b), o bien de los semi-intervalos $(a, b]$, $[a, b)$.

Un intervalo arbitrario (a, b), en el que está contenido el punto c $(a < c < b)$, lo llamaremos *entorno del punto c*. En particular, el intervalo $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ se denomina *ε-entorno del punto c*.

Sea $X = \{x\}$ un conjunto arbitrario de números reales. Suele decirse que el conjunto X *está acotado superiormente*, si $\exists$ un número (real) M tal que $\forall x \in X$: $x \leqslant M$; *acotado inferiormente*, si $\exists$ un número m tal que $\forall x \in X$: $x \geqslant m$; y *acotado*, si está acotado tanto superior como inferiormente. El número M (m) se llama *cota superior* (*inferior*) del conjunto X. Al número M lo llaman también *mayorante* del conjunto X.

Es obvio que podemos decir en adición que el conjunto X está acotado, si $\exists$ un número $M > 0$ tal que $\forall x \in X$: $|x| \leqslant M$, puesto que la desigualdad $|x| \leqslant M$ es equivalente a dos igualdades $-M \leqslant x \leqslant M$.

Si el conjunto X no está acotado, lo llaman *no acotado*. Se puede definirlo del modo siguiente: el conjunto X de números reales no está acotado, si $\forall M > 0$, $\exists x_0 \in X$: $|x_0| > M$. A esta enunciación podemos llegar partiendo de la regla para construir la negación de la dada fórmula lógica.

EJEMPLOS. El segmento $[a, b]$ es un conjunto acotado. El intervalo (a, b) es un conjunto acotado, siempre que a y b son finitos, y no acotado, si $a = -\infty$ o bien $b = \infty$.

§ 1.11. Conjunto numerable. Numerabilidad del conjunto de números racionales. Innumerabilidad del conjunto de números reales.

Más arriba hemos definido el concepto de igualdad de los conjuntos. Para caracterizar el grado en que los conjuntos infinitos están llenados de elementos, resulta cómodo el concepto de equivalencia de los conjuntos. Un conjunto X se denomina *infinito*, si $\forall n \in \mathbf{N}$: en el conjunto X se tienen elementos cuya cantidad es superior a n. Dos conjuntos A y B se llaman *equivalentes* (se escribe en este caso que $A \sim B$), si entre sus elementos puede establecerse una correspondencia biunívoca ($\leftrightarrow$), es decir, si existe una regla o una ley tal que de acuerdo con ella a $\forall a \in A$ le corresponde un elemento bien determinado $b \in B$. Además, en virtud de dicha regla, a dos

elementos distintos $a_1, a_2 \in A$ les corresponden dos elementos distintos $b_1, b_2 \in B$ y todo elemento $b \in B$ corresponde a cierto elemento $a \in A$.

Por ejemplo, si A es el conjunto de puntos en una circunferencia de radio r, y B es el conjunto de puntos dispuestos en una circunferencia concéntrica de radio $R > r$, queda obvio que $A \sim B$ (fig. 6).

Es evidente que si $A = B$, entonces $A \sim B$.

Si $X = \{x\} \sim \mathbf{N} = \{n\}$, el conjunto X se llamará *numerable*. Está claro que el propio conjunto de números naturales $\mathbf{N}$ es numerable (la correspondencia se establece de conformidad con el esquema $n \leftrightarrow n$). Un conjunto de todos los números naturales pares $\mathbf{N}_p = \{2n\}$ es equivalente a todo el conjunto $\mathbf{N}$, con la particularidad de que la correspondencia se establece según el esquema $n \to 2n$. Ha de notarse que aquí $\mathbf{N}_p \neq \mathbf{N}$, $\mathbf{N}_p \subset \mathbf{N}$. De este modo, un subconjunto auténtico (una parte) del conjunto resultó ser equivalente a todo el conjunto. Esta propiedad es característica sólo para los conjuntos infinitos (se puede tomarla por definición de conjunto infinito).

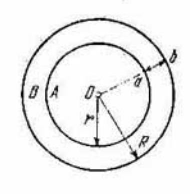


Fig. 6

De la definición de numerabilidad de un conjunto se desprende que sus elementos pueden ser numerados con ayuda de los números naturales, razón por la cual el conjunto numerable se escribirá con frecuencia en forma de la sucesión de sus elementos:

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}.$$

Una suma numerable (en el sentido de la teoría de conjunto)

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E^k = E^1 + E^2 + \ldots$$

de los conjuntos numerables (o finitos) E^k es un conjunto numerable. En efecto, escribamos los elementos $x_j^k \in E^k$ $(j = 1, 2, \ldots)$ en forma de una tabla:

$$E^1 = \{x_1^1, x_2^1, x_3^1, \ldots\},$$
$$E^2 = \{x_1^2, x_2^2, x_3^2, \ldots\},$$
$$E^3 = \{x_1^3, x_2^3, x_3^3, \ldots\}.$$

Numerémoslos en el orden siguiente:

$$x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_3^1, x_2^2, x_1^3, x_4^1, \ldots,$$

suprimiendo, sin embargo, en cada etapa de la numeración aquellos elementos que ya han sido numerados en la etapa antecedente: es

que puede suceder que E^k y E^l disponen de elementos comunes. De resultas, se obtendrá una sucesión infinita de elementos $\{y_1, y_2, y_3, \ldots\}$ que agotan, evidentemente, el conjunto E. Esto demuestra que E es un conjunto numerable.

De un modo análogo se demuestra que *la suma finita* $E = E^1 + \ldots + E^N$ *de conjuntos finitos o numerables, entre los cuales hay por lo menos un conjunto numerable, es numerable.*

TEOREMA 1. *Un conjunto de todos los números racionales es numerable.*

Demostración. Examinemos, al principio, los números racionales positivos $\mathbf{Q}_+ = \{p/q\}$. El número natural $p + q$ se llamará altura del número racional p/q. Sea A_n un conjunto de todos los números racionales de altura igual a n. Los conjuntos A_n se componen de un número finito de elementos (números racionales), por ejemplo,

$$A_1 = \varnothing,\ A_2 = \left\{\frac{1}{1}\right\},\ A_3 = \left\{\frac{1}{2},\ \frac{2}{1}\right\},\ A_4 = \left\{\frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1}\right\},\ \ldots .$$

Es fácil ver que $\mathbf{Q}_+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Enumeremos los números puestos entre las llaves de izquierda a derecha, suprimiendo, por otra parte, en cada etapa de la numeración aquellos que ya se han sido numerados en una de las etapas antecedentes. De resultas, se obtendrá la sucesión

$$r_1 = 1,\ r_2 = \frac{1}{2},\ r_3 = 2,\ r_4 = \frac{1}{3},\ r_5 = 3,\ \ldots .$$

Por cuanto hay una infinidad de números positivos racionales, utilizaremos todos los números naturales. Quiere decir, $\mathbf{Q}_+$ es numerable. Luego, es obvio que $\mathbf{Q}_- = \{-p/q\}$ es numerable. Por eso todo el conjunto de números racionales $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_+ \cup \mathbf{Q}_- \cup \{0\}$ es también numerable.

TEOREMA 2. *Un conjunto de todos los números reales no es numerable*

Demostración. Para demostrar el teorema es suficiente establecer que los números reales del intervalo $(0, 1)$ forman un conjunto no numerable. Admitamos lo contrario, a saber, el intervalo $(0, 1)$ es un conjunto numerable, es decir, se pueden enumerar todos los puntos suyos:

$$x_1 = 0,\ a_1^{(1)} a_2^{(1)},\ \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = 0,\ a_1^{(n)} a_2^{(n)}\ \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Pero, esta suposición es contradictoria. En efecto, construyamos un número real $x = 0{,}a_1 a_2 \ldots$, en el que las cifras a_n están seleccionadas de un modo tal que $0 < a_n < 9$ y $a_n \neq a_n^{(n)}$. Está claro que $x \in (0, 1)$, no obstante x no coincide con ninguno de los números x_{n_0}, puesto que de lo contrario debería ser $a_{n_0} = a_{n_0}^{n_0}$, lo que no es posible.

Capítulo 2

Límite de una sucesión

§ 2.1. Concepto de límite de una sucesión

Supongamos que a todo número natural $n = 1, 2, 3, \ldots$ se le ha puesto en correspondencia, de acuerdo con cierta ley, un número real o complejo x_n.

En tal caso se dice que con esto queda definida una *sucesión de números* $x_1, x_2, x_3, \ldots$ o bien, para abreviar, la sucesión

$$\{x_n\} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}.$$

Dicen también que la variable x_n recorre los valores de la sucesión $\{x_n\}$.

Los números aislados x_n de la sucesión $\{x_n\}$ reciben el nombre de sus *elementos*. Se debe tener en cuenta que x_n y x_m, para $n \neq m$, se consideran distintos en su calidad de elementos de la sucesión, aunque no se excluye que son iguales entre sí como los números, es decir, resulta posible que $x_n = x_m$.

Si se pone $x_n = y_{n-1}$, la sucesión $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ se convertirá en un conjunto $\{y_0, y_1, y_2, \ldots\}$, el cual en el § 1.6 también recibió el nombre de sucesión.

En el presente capítulo se examinarán las sucesiones de números *reales*, lo que no se espicificará más.

Los ejemplos de las sucesiones:

EJEMPLO 1. $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$.

EJEMPLO 2. $\left\{\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \ldots\right\} = \{2^{(-1)^n}\}$.

EJEMPLO 3. $\left\{1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, \ldots\right\} = \{n^{(-1)^n}\}$.

EJEMPLO 4. $\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\right\} = \left\{\frac{n-1}{n}\right\}$.

EJEMPLO 5. $\{2, 5, 10, \ldots\} = \{n^2 + 1\}$.

EJEMPLO 6. $\{-1, 2, -3, 4, \ldots\} = \{(-1)^n n\}$.

En el ejemplo 2 la variable x_n toma, para n pares, un mismo valor:

$$2 = x_2 = x_4 = x_6 = \ldots.$$

No obstante, consideramos que los elementos x_2, x_4, . . . son distintos.

Si todos los elementos de la sucesión $\{x_n\}$ son iguales a un mismo número a, la llaman *constante*.

Es fácil ver que las sucesiones en los ejemplos 1, 2 y 4 *están acotadas* (véase el § 1.6). En este caso se dice también que las variables correspondientes que recorren dichas sucesiones están acotadas. Cuanto a las sucesiones en los ejemplos 3, 5 y 6, éstas no están acotadas. Sin embargo, la sucesión en el ejemplo 3 está, evidentemente, acotada inferiormente por el número 0, mientras que la sucesión en el ejemplo 5 está acotada inferiormente por el número 2. En lo que se refiere a la sucesión en el ejemplo 6, podemos decir que no está acotada ni por debajo ni por arriba.

Introduzcamos el concepto de límite de una sucesión.

DEFINICION 1. *El número a se denomina límite de la sucesión $\{x_n\}$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número (dependiente de ε) $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que se verifica la desigualdad*

$$|x_n - a| < \varepsilon, \tag{1}$$

cualquiera que sea n (natural) $> n_0$.

En este caso se escribe

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim x_n = a \text{ ó } x_n \to a$$

y se dice que la variable x_n o bien la sucesión $\{x_n\}$ tiene un límite igual al número a, o tiende hacia a. Dicen también que la variable x_n o la sucesión $\{x_n\}$ *converge al número a.*

Si $x_n = a$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces, evidentemente, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim a = a$.

Observación. Si $\lim x_n = a$, entonces $\lim x_{n+1} = a$, y viceversa. Esto proviene del hecho de que si

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n > n_0,$$

entonces

$$|x_{n+1} - a| < \varepsilon, \quad \forall n > n_0 - 1,$$

y viceversa.

La variable en el ejemplo 1 tiene un límite igual a 0:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0. \tag{2}$$

En efecto, prefijemos arbitrariamente $\varepsilon > 0$ y resolvamos la desigualdad

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ ó } \frac{1}{\varepsilon} < n.$$

Con esto queda encontrado, para cualquier $\varepsilon > 0$, el número $n_0 = n_0(\varepsilon) = 1/\varepsilon$ tal que la desigualdad

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$$

se verifica para todo $n > n_0$, y la igualdad (2) está demostrada.

EJEMPLO 7. La variable del ejemplo 4 tiende hacia 1:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=1. \tag{3}$$

En efecto, formemos una desigualdad

$$\left|1-\frac{n-1}{n}\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

Esta desigualdad se verifica, según lo hemos visto, para todo $\varepsilon > 0$ si $n > n_0 = 1/\varepsilon$. Esto se demuestra por la igualdad (3).

EJEMPLO 8. Si $|q| < 1$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} q^n=0. \tag{4}$$

Efectivamente, supongamos por ahora que $q \neq 0$. La desigualdad

$$|q^n-0|=|q^n|<\varepsilon$$

es verídica, si

$$n \lg |q| < \lg \varepsilon,$$

es decir, si

$$n>\frac{\lg \varepsilon}{\lg |q|}=n_0(\varepsilon).$$

Hemos demostrado, pues, (4) para $0 < |q| < 1$. Si $q = 0$, la igualdad (4) es trivial, puesto que en este caso la variable q^n es una constante igual a cero:

$$\{0,\ 0,\ 0\ \ldots\}.$$

EJEMPLO 9. Desarrollemos el número positivo a en una fracción decimal infinita

$$a = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots .$$

Para el n-ésimo número truncado

$$a^{(n)} = a_0, a_1 \ldots a_n$$

tiene lugar la igualdad

$$\lim_{n\to\infty} a^{(n)} = a. \tag{5}$$

En efecto,

$$|a-a^{(n)}| = \underbrace{0,0\ldots 0}_{n \text{ veces}}a_{n+1}a_{n+2}\ldots \leqslant 10^{-n}.$$

Pero, si prefijamos $\varepsilon > 0$, siempre se encontrará un número n_0 tal que

$$10^{-n} < \varepsilon, \quad \forall n > n_0$$

(véase el ejemplo antecedente, donde se debe considerar $q = 10^{-1}$). Por eso

$$| a - a^{(n)} | < \varepsilon, \quad \forall n > n_0,$$

y queda demostrada la igualdad (5).

Observación. Los números truncados $a^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ son racionales. De (5) se deduce que *todo número real* es el límite de una sucesión de números racionales.

De este modo, todo número irracional puede ser aproximado por un número racional con cualquier grado de precisión prefijado de antemano.

$a-\varepsilon$ $a+\varepsilon$
c a d x

Fig. 7

En virtud de esta propiedad, dicen, refiriéndose al conjunto Q de números racionales, que dicho conjunto *es siempre denso* en el conjunto **R** de todos los números reales.

La desigualdad

$$| x_n - a | < \varepsilon$$

es equivalente a dos desigualdades

$$-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \quad ó \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$$

lo que equivale a decir que el punto x pertenece al ε-entorno del punto a:

$$x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \quad \text{(véase el § 1.10)}.$$

Entonces, la definición de límite puede expresarse del modo siguiente: el número (punto) a es un límite de la variable x_n, siempre que, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$, existe tal número n_0 que todos los puntos x_n de índices $n > n_0$ quedan ubicados dentro del ε-entorno del punto a:

$$x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \quad (n > n_0).$$

Obviamente, cualquiera que sea el entorno (c, d) del punto a, se encontrará tal $\varepsilon > 0$ que el intervalo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ esté contenido en (c, d), es decir, $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset (c, d)$ (fig. 7).

Por esta razón, el hecho de que $x_n \to a$ puede expresarse también así: cualquiera que sea el entorno (c, d) del punto a, todos los puntos x_n, a partir de cierto número n, deben caer en dicho entorno, es decir, debe existir tal número n_0 que $x_n \in (c, d)$ $(n > n_0)$. En lo que se refiere a los puntos x_n de índices $n \leqslant n_0$, éstos pueden pertenecer y pueden nó pertenecer a (c, d). De este modo, si fuera de (c, d) se tienen puntos x_n, su cantidad es finita.

Por otra parte, si se sabe que fuera de (c, d) hay sólo un número finito de puntos $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_s}$, entonces, al designar

$$k = \text{máx}\ \{n_1, n_2, \ldots, n_s\},$$

es decir, el máximo entre los índices $n_1, \ldots, n_s$, podemos decir que los puntos x_n de índices $n > k$ quedarán ubicados dentro del intervalo (c, d). Por eso, el concepto de límite se puede enunciar también así: la variable x_n tiene el punto a como su límite, si *fuera de cualquier entorno de dicho punto se tiene un conjunto finito o vacío de los puntos* x_n.

EJEMPLO 10. La variable

$$\{(-1)^{n+1}\} = \{1, -1, 1, -1, \ldots\} \tag{6}$$

no tiende a ningún límite.

Efectivamente, admitamos que esta variable tiene su límite, igual al número a. Examinemos el entorno del punto citado

$$\left(a-\frac{1}{3},\ a+\frac{1}{3}\right).$$

La longitud del entorno es 2/3. Está claro que dicho entorno no puede contener en sí el punto 1 y el punto -1 a la vez, porque la distancia entre estos puntos es igual a 2 ($2 > 2/3$). Convengamos en considerar, para concretar, que el punto 1 no pertenece a nuestro entorno. Pero $x_n = 1$ cuando $n = 1, 3, 5, \ldots$, es decir, fuera de nuestro entorno hay una infinidad de elementos de la sucesión.

Así pues, el punto a no puede servir de límite para nuestra sucesión, y, como este punto es arbitrario, la sucesión (6) no tiene límite.

TEOREMA 1. *Si la variable x_n tiene un límite, éste es el único.*

En efecto, admitamos, contrariamente al teorema, que x_n tiene dos límites distintos a y b. Cubramos los puntos a, b con los intervalos (c, d), (e, f), respectivamente, de longitud tan pequeña que estos intervalos no se corten (fig. 8). Como $x_n \to a$, entonces en el intervalo (c, d) se disponen todos los elementos x_n, a excepción de un número finito de ellos, pero en tal caso el intervalo (e, f) no puede contener en sí un número infinito de elementos x_n y x_n no puede tender a b. Hemos llegado a una contradicción. El teorema está demostrado.

Fig. 8

TEOREMA 2. *Si la sucesión $\{x_n\}$ es convergente, está acotada.*

Demostración. Sea $\lim x_n = a$. Prefijemos $\varepsilon = 1$ y elijamos un número natural $n_0 = n_0(1)$ de un modo tal que sea

$$1 > |x_n - a| \quad (n > n_0).$$

pero entonces, $1 > |x_n| - |a|$, y se verifica la desigualdad

$$1 + |a| > |x_n|$$

para todos los $n > n_0$. Sea M el máximo de los números

$$1 + |a|, |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_0}|.$$

En este caso resulta obvio que

$$M \geqslant |x_n|, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

El teorema queda demostrado.

Observación. La condición de que la sucesión esté acotada es necesaria para la convergencia de la sucesión, pero no suficiente, según lo muestra el ejemplo 10.

TEOREMA 3. *Si la variable x_n tiene un límite a distinto de cero, se encontrará tal n_0 que*

$$|x_n| > |a|/2 \quad \text{para} \quad n > n_0.$$

Es más, para los n indicados, si $a > 0$, entonces $x_n > a/2$, y si $a < 0$, se tiene $x_n < a/2$. De este modo, a partir de cierto número, x_n conserva el signo de a.

Demostración. Supongamos que $x_n \to a$. Entonces, para $\varepsilon = |a|/2$ debe existir un número n_0 tal que

$$|a|/2 > |a - x_n| \geqslant |a| - |x_n| \quad (n > n_0),$$

de donde $|x_n| > |a| - \frac{|a|}{2} = \frac{|a|}{2}$, y la primera afirmación del teorema queda demostrada. Por otra parte, la desigualdad $|a|/2 > |a - x_n|$ es equivalente a las siguientes dos igualdades:

$$a - \frac{|a|}{2} < x_n < a + \frac{|a|}{2} \quad (n > n_0).$$

Ahora, si $a > 0$, se tiene

$$x_n > \frac{a}{2} = a - \frac{|a|}{2} \quad (n > n_0).$$

y si $a < 0$, entonces

$$x_n < a + \frac{|a|}{2} = a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \quad (n > n_0),$$

con lo que queda demostrada la segunda afirmación del teorema.

TEOREMA 4. *Si $x_n \to a$, $y_n \to b$ y $x_n \leqslant y_n$ para todo $n = 1, 2, \ldots$, entonces $a \leqslant b$.*

Demostración. Admitamos que $b < a$. Prefijemos $0 < \varepsilon < (a - b)/2$ y elijamos los números N_1 y N_2 de modo tal que sea

$$a - \varepsilon < x_n \quad (n > N_1), \quad y_n < b + \varepsilon \quad (n > N_2),$$

lo que es factible, puesto que $x_n \to a$ e $y_n \to b$.

Si $n_0 = \text{máx}\ \{N_1, N_2\}$, entonces, evidentemente, $y_n < b + \varepsilon < a - \varepsilon < x_n$ $(n > n_0)$ y estamos frente a una contradicción, dado que, por hipótesis, $x_n \leqslant y_n$ para todo n.

COROLARIO. *Si los elementos de una sucesión convergente $\{x_n\}$ pertenecen a $[a, b]$, el límite de la sucesión citada también pertenece a $[a, b]$.*

Demostración. En efecto, $a \leqslant x_n \leqslant b$. Si $\lim x_n = c$, entonces, de acuerdo con el teorema 4, $a \leqslant c \leqslant b$, lo que se trataba de demostrar.

Observación. Para el intervalo (a, b) sólo se puede afirmar que si $x_n \in (a, b)$, entonces $\lim x_n = c \in [a, b]$.

De este modo, las desigualdades en límite quedan en vigor o se convierten en una igualdad. Por ejemplo, $x_n = 1/(n+1) \in (0, 1)$, pero $c = 0 \in [0, 1]$.

TEOREMA 5. *Si las variables x_n e y_n tienden hacia un mismo límite a y $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, entonces la variable z_n también tiende hacia a.*

Demostración. Al prefijar $\varepsilon > 0$, podemos encontrar N_1 y N_2 tales que sea

$$a - \varepsilon < x_n \quad (n > N_1), \quad y_n < a + \varepsilon \quad (n > N_2),$$

de donde para $n > n_0 = \text{máx}\ \{N_1, N_2\}$ se tiene

$$a - \varepsilon < x_n \leqslant z_n \leqslant y_n < a + \varepsilon$$

y

$$| z_n - a | < \varepsilon \quad (n > n_0),$$

lo que se trataba de demostrar.

TEOREMA 6. *Si $x_n \to a$, entonces $| x_n | \to | a |$.*

La demostración proviene de la desigualdad $|| x_n | - | a || \leqslant | x_n - a |$.

§ 2.2. Operaciones aritméticas con las variables que tienen límite

Sean x_n e y_n unas variables que recorren las sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, respectivamente. Según la definición, *la suma $x_n + y_n$, la diferencia $x_n - y_n$, el producto $x_n y_n$ y el cociente x_n/y_n son, en esencia, las variables* que recorren las sucesiones $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n y_n\}$ y $\{x_n/y_n\}$, respectivamente. En el caso de un cociente se supone que $y_n \neq 0$ para todo $n = 1, 2, \ldots$.

Si $x_n = c$ para $n = 1, 2, \ldots$, en lugar de $x_n \pm y_n$, $x_n y_n$, x_n/y_n se escribe $c \pm y_n$, cy_n, c/y_n.

Son válidas las siguientes afirmaciones:

$$\lim (x_n \pm y_n) = \lim x_n \pm \lim y_n, \tag{1}$$

$$\lim (x_n y_n) = \lim x_n \cdot \lim y_n, \tag{2}$$

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim x_n}{\lim y_n}, \text{ si } \lim y_n \neq 0. \tag{3}$$

Dichas afirmaciones se deben entender en el sentido de que *si existen los límites finitos de x_n e y_n, entonces existen también los límites de su suma, diferencia, producto y cociente* (*con la reserva mencionada*) *y se verifican las igualdades* (1)—(3).

Demostración. Supongamos que $x_n \to a$ e $y_n \to b$. Prefijemos $\varepsilon > 0$ y elijamos n_0 de un modo tal que sea

$$|x_n - a| < \varepsilon/2, \quad |y_n - b| < \varepsilon/2 \quad (n > n_0).$$

Entonces

$$|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)| \leqslant |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ (n > n_0),$$

con lo que queda demostrada (1).

Para demostrar (2) observemos que

$$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - a y_n + a y_n - ab| \leqslant$$
$$\leqslant |x_n y_n - a y_n| + |a y_n - ab| = |y_n|\,|x_n - a| +$$
$$+ |a|\,|y_n - b|. \tag{4}$$

Dado que y_n tiene un límite, entonces (de acuerdo con el teorema 2 del párrafo antecedente) existe un número positivo M tal que

$$|y_n| \leqslant M \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

$$|a| \leqslant M. \tag{6}$$

Elijamos el número n_0 de tal modo que sea

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}, \ |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M} \ (n > n_0). \tag{7}$$

En este caso de (4) — (7) resulta

$$|x_n y_n - ab| < \frac{M\varepsilon}{2M} + \frac{M\varepsilon}{2M} = \varepsilon \ (n > n_0),$$

con lo que queda demostrada la igualdad (2).

Supongamos ahora que a la condición de que $x_n \to a$ e $y_n \to b$ se agrega otra condición más, a saber, $b \neq 0$. Entonces

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{x_n b - y_n a}{y_n b}\right| = \frac{|(x_n - a) b + (b - y_n) a|}{|y_n|\,|b|} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{|x_n - a|}{|y_n|} + \frac{|b - y_n|\,|a|}{|y_n|\,|b|}. \tag{8}$$

Ahora ya es cómodo utilizar el teorema 3 del párrafo anterior, en virtud del cual

$$|y_n| > |b|/2 \quad (n > N_1) \tag{9}$$

para N_1 suficientemente grande. Prefijemos $\varepsilon > 0$ y elijamos N_2 y N_3 de un modo tal que se verifiquen

$$|x_n - a| < \varepsilon |b|/4 \quad (n > N_2), \tag{10}$$

$$|a||y_n - b| < \varepsilon b^2/4 \quad (n > N_3). \tag{11}$$

Luego, al poner $n_0 = \text{máx}\{N_1, N_2, N_3\}$, tendremos, en vista de (8) — (11):

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| < \frac{\varepsilon \cdot |b|}{4} \cdot \frac{2}{|b|} + \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon \quad (n > n_0),$$

lo que demuestra la igualdad (3).

Hemos de notar que los límites de las variables que figuran en los primeros miembros de las igualdades (1) — (3) pueden existir sin que existan por separado los límites de x_n e y_n. Por ejemplo, si $x_n = (-1)^n$, $y_n = (-1)^{n+1}$, entonces x_n e y_n no tienen límites, mientras que $\text{lím}\,(x_n + y_n) = 0$, $\text{lím}\, x_n y_n = -1$.

Existen varias circunstancias en que los teoremas sobre los límites de una suma, una diferencia, un producto y un cociente prestan la posibilidad de determinar si una variable dispone de su límite y a qué es igual éste último, siempre que la variable representa el resultado de un número finito de operaciones aritméticas con algunas otras variables, para las cuales se conocen tanto la existencia de sus límites como también la magnitud de éstos.

No obstante, se encuentran a menudo los casos que salen de los márgenes de la aplicación de los teoremas demostrados, dejando un gran campo de actividad para aquellos que son capaces de revelar la iniciativa matemática.

EJEMPLO 1. Sea $x_n = 1 + q + \ldots + q^n$, $|q| < 1$. Demuéstrese que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{1-q}.$$

Tenemos

$$x_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}.$$

Por cuanto $\text{lím}\, q^{n+1} = 0$ para $|q| < 1$, entonces, al aplicar las fórmulas (1), (2), obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q} \lim_{n\to\infty} q^{n+1} = \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q}\cdot 0 = \frac{1}{1-q}.$$

En lo que sigue por símbolo

$$1+q+\ldots+q^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

se entenderá $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} q^k$. De este modo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n=\lim_{n\to\infty} x_n=\frac{1}{1-q} \quad (|q|<1).$$

§ 2.3. Infinitésimo y variable infinitamente grande

Una variable α_n que tiene límite igual a cero, se denomina *infinitamente pequeña o, más brevemente, infinitésimo.*

De este modo, una variable α_n es un infinitésimo, siempre que para todo $\varepsilon>0$ existe tal n_0 que $|\alpha_n|<\varepsilon$ $(n>n_0)$.

No es difícil ver que *para que una variable x_n tenga un límite a, es necesario y suficiente que $x_n=a+\alpha_n$, donde α_n es un infinitésimo.*

Una variable β_n se denomina *infinitamente grande* o, simplemente, *infinito*, siempre que para cualquier $M>0$ existe tal n_0 que $|\beta_n|>M$ $(n>n_0)$. En este caso se escribe

$$\lim \beta_n=\infty, \quad \text{o bien} \quad \beta_n\to\infty \tag{1}$$

y se dice que β_n *tiende al infinito.*

Si una variable infinitamente grande β_n toma, a partir de cierto n_0, sólo valores positivos o sólo valores negativos, se escribe

$$\lim \beta_n=+\infty, \quad \text{o bien} \quad \beta_n\to+\infty, \tag{2}$$

y, correspondientemente,

$$\lim \beta_n=-\infty, \quad \text{o bien} \quad \beta_n\to-\infty. \tag{3}$$

Así pues, de (2), al igual que de (3), se deduce (1). El ejemplo de la variable $\{(-1)^n n\}$ muestra que puede tener lugar la relación (1), en tanto que (2) y (3) no tienen lugar.

Demos a conocer las siguientes propiedades evidentes:

1. *Si la variable x_n está acotada e y_n es infinitamente grande, entonces $x_n/y_n\to 0$.*

2. *Si la magnitud absoluta x_n está acotada inferiormente por un número positivo e y_n es un infinitésimo diferente de cero, entonces $x_n/y_n\to\infty$.*

Demostremos sólo la segunda propiedad. Supongamos que para cierto número $a>0$ tiene lugar la desigualdad $|x_n|>a$ $(n=$

$= 1, 2, \ldots$) y para todo $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que

$$|y_n| < \varepsilon \quad (n > n_0). \tag{4}$$

En tal caso

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right| > \frac{a}{\varepsilon} = M \quad (n > n_0).$$

Prefijemos arbitrariamente un número positivo M y elijamos según él un ε tal que sea $M = a/\varepsilon$; tomemos, además, según ε, tal n_0 que tenga lugar la propiedad (4). Entonces, $|x_n/y_n| > M$ $(n > n_0)$, lo que se trataba de demostrar.

De las dos afirmaciones enunciadas se obtienen los siguientes corolarios:

$$\lim_{y_n \to \infty} \frac{c}{y_n} = 0, \quad \lim_{y_n \to 0} \frac{c}{y_n} = \infty \quad (c \neq 0).$$

Observemos que si la sucesión $\{x_n\}$ no está acotada, no será obligatoriamente infinitamente grande. Por ejemplo, una sucesión

$$\{n^{(-1)^n}\} = \left\{1, 2, \frac{1}{3}, 4, \ldots\right\}$$

no está acotada, pero no es infinitamente grande, puesto que contiene unos términos, tan pequeños como se quiera, con un número (impar) tan grande como se quiera.

Observación. Cualquier magnitud constante (sucesión) distinta de cero no es una infinitésima. De todas las magnitudes constantes hay sólo una infinitésima: la que es igual a cero. Si se sabe de una cierta magnitud que es constante y su valor absoluto es inferior a cualquier número positivo ε, dicha magnitud es igual a cero.

TEOREMA 1. *El producto de una sucesión infinitamente pequeña por otra acotada es una sucesión infinitamente pequeña, es decir, si* $\lim x_n = 0$ *e* $|y_n| \leqslant M$, $\forall n \in N$, *entonces* $\lim x_n y_n = 0$.

En efecto, prefijemos $\varepsilon > 0$ y elijamos n_0 de modo tal que

$$|x_n| < \varepsilon/M, \quad \forall n > n_0.$$

En este caso

$$|x_n y_n - 0| = |x_n|\,|y_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon, \quad \forall n > n_0,$$

lo que se trataba de demostrar.

§ 2.4. Expresiones indeterminadas

1. Sea $\lim x_n = \lim y_n = 0$ $(y_n \neq 0)$.

Analicemos la sucesión $\{x_n/y_n\}$. De antemano no podemos decir algo determinado sobre el límite de esta sucesión y esto se muestra

por los siguientes ejemplos:

si $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n^2}$, entonces $\frac{x_n}{y_n} = n \to +\infty$ para $n \to \infty$;

si $x_n = \frac{1}{n^2}$, $y_n = \frac{1}{n}$, entonces $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{n} \to 0$ para $n \to \infty$;

si $x_n = \frac{a}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$, entonces $\frac{x_n}{y_n} = a \to a$ para $n \to \infty$;

si $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $y_n = \frac{1}{n}$, entonces $\frac{x_n}{y_n} = (-1)^n$ y el límite de esta sucesión no existe.

De este modo, para determinar el límite de $\{x_n/y_n\}$ no es suficiente conocer que $x_n \to 0$, $y_n \to 0$. Son necesarios, además, ciertos datos adicionales sobre el carácter de variación de x_n e y_n. Para encontrar dicho límite hacen falta los procedimientos especiales en cada caso concreto.

Suele decirse que la expresión x_n/y_n para $x_n \to 0$, $y_n \to 0$ representa una *indeterminación de la forma* $\left(\frac{0}{0}\right)$

2. Si $x_n \to \infty$, $y_n \to \infty$, la expresión x_n/y_n también representa una indeterminación y la llaman *indeterminación de la forma* $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

3. Si $x_n \to 0$, $y_n \to \infty$, para la expresión $x_n y_n$ se obtiene una *indeterminación de la forma* $(0 \cdot \infty)$.

4. Si $x_n \to +\infty$, $y_n \to -\infty$, entonces la expresión $x_n + y_n$ representa una *indeterminación de la forma* $(\infty - \infty)$.

Para cada uno de los casos mencionados pueden aducirse los ejemplos correspondientes.

Resolver una indeterminación correspondiente quiere decir calcular el límite (si existe) de la expresión correspondiente lo que no es siempre fácil.

EJEMPLO 1. Si

$$x_n = a_m n^m + \ldots + a_1 n + a_0,$$
$$y_n = b_l n^l + \ldots + b_1 n + b_0 \quad (a_m \neq 0,\ b_l \neq 0),$$

entonces, cuando $n \to \infty$, para la expresión x_n/y_n tenemos una indeterminación de la forma $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Resolvamos dicha indeterminación.

a) Si $l = m$, tendremos al dividir el numerador y el denominador por n^m:

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{a_m + \frac{a_{m-1}}{n} + \ldots + \frac{a_0}{n^m}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{n} + \ldots + \frac{b_0}{n^m}} \to \frac{a_m}{b_m}$$

cuando $n \to \infty$, es decir, $\lim (x_n/y_n) = a_m/b_m$ (a la razón entre los coeficientes de las potencias superiores de n en las expresiones para x_n e y_n).

b) Análogamente podemos mostrar que, para $m > l$, $\lim (x_n/y_n) = \infty$, y, para $m < l$, $\lim (x_n/y_n) = 0$.

EJEMPLO 2. Si $x_n = \sqrt{n+1}$, $y_n = \sqrt{n}$, entonces, cuando $n \to \infty$, para la expresión $x_n - y_n$ tenemos una indeterminación de la forma $(\infty - \infty)$.

Resolvamos esta indeterminación:

$$x_n - y_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \to 0$$

para $n \to \infty$. Esto significa que $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$.

§ 2.5. Sucesiones monótonas

DEFINICIÓN. Una sucesión $\{x_n\}$ se denomina *no decreciente* (*no creciente*), si $\forall n \in \mathbb{N}$ se verifica la desigualdad

$$x_n \leqslant x_{n+1} \quad (x_n \geqslant x_{n+1}).$$

Si, de hecho, se cumplen las desigualdades estrictas $x_n < x_{n+1}$ $(x_n > x_{n+1})$, la sucesión $\{x_n\}$ se llama *estrictamente creciente* (*estrictamente decreciente*) o simplemente *creciente* (*decreciente*). Las sucesiones decrecientes y crecientes, como también no decrecientes y no crecientes reciben el nombre de *monótonas*.

Los elementos de las sucesiones monótonas pueden disponerse en las cadenas $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \ldots$ $(x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant x_{n+1} \ldots)$, de donde se ve que una sucesión no decreciente está acotada inferiormente, y la no creciente, superiormente.

EJEMPLOS:

1) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$ es una sucesión no creciente.

2) $\{n^2\}$ es una sucesión creciente.

Más abajo viene la demostración de un teorema importante que afirma que una sucesión acotada monótona de números siempre tiene su límite. En el § 1.7 el mismo teorema figuraba como una de las propiedades fundamentales (propiedad V) de un conjunto de números reales.

TEOREMA 1. *Si una sucesión de números reales*

$$a_1, a_2, a_3, \ldots \tag{1}$$

no decrece (no crece) y está acotada superiormente (inferiormente) por el número M (m, respectivamente), entonces existe un número real a, no superior a M (no inferior a m), hacia el cual la sucesión dada tiende como a su límite:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \leqslant M \tag{2}$$

$(\lim_{n\to\infty} a_n = a \geqslant m$, *respectivamente*).

Demostración. Supongamos que la sucesión (1) no decrece y que, por ahora, $a_1 > 0$; entonces también todos los $a_n > 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Desarrollemos cada elemento de la sucesión en una fracción decimal infinita:

$$a_n = \alpha_{n0}, \alpha_{n1}\alpha_{n2}\alpha_{n3} \ldots \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Por cuanto la sucesión $\{a_n\}$ está acotada superiormente por el número M $(a_n \leqslant M)$ y no decrece, entonces, en virtud del lema 2 del § 1.6, las fracciones decimales (3) se estabilizan hacia cierto número $a \leqslant M$:

$$a_n \rightrightarrows a = \gamma_0, \gamma_1\gamma_2 \ldots,$$

pero a_n, en este caso, tiende hacia a como a su límite:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

En efecto, para cualquier ε existe un número natural m tal que $10^{-m} < \varepsilon$. Puesto que a_n se estabiliza hacia el número a, resulta

$$a_n = \gamma_0, \gamma_1 \ldots \gamma_m \alpha_{n,\, m+1} \alpha_{n,\, m+2} \ldots$$

para todo $n > n_0$, donde n_0 es suficientemente grande, mas en tal caso

$$|a - a_n| = a - a_n \leqslant \underbrace{0, 0 \ldots 0}_{m \text{ veces}} \gamma_{m+1}\gamma_{m+2} \ldots \leqslant 10^{-m} < \varepsilon$$

$$(n > n_0),$$

es decir, $a_n \to a$ cuando $n \to \infty$.

Si $a_1 \leqslant 0$, agreguemos al número a_1 otro número c tan grande que se verifique $a_1 + c > 0$, y hagamos $b_n = a_n + c$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

La sucesión $\{b_n\}$ no decrece, está acotada superiormente por el número $M + c$ y sus elementos son positivos. Por eso, de acuerdo con lo demostrado más arriba, existe un límite $\lim_{n\to\infty} b_n = b \leqslant M + c$ pero, en este caso, existe también el límite $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (b_n - c) = b - c \leqslant M$, con lo que el teorema queda demostrado para una sucesión arbitraria no decreciente.

Si, ahora, la sucesión $\{a_n\}$ no crece y está acotada inferiormente por el número m, entonces la sucesión de números $\{-a_n\}$ no decrece y está acotada superiormente por el número $-m$, y, en vista de lo demostrado, existe un límite $\lim_{n\to\infty} (-a_n) = -a \leqslant -m$, designado por nosotros mediante $-a$. Por consiguien-

te, existe también $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\lim\limits_{n\to\infty} (-a_n) = -(a) = a \geqslant m$. El teorema queda demostrado.

Observación. Si una sucesión de números reales $\{a_n\}$ es convergente, los desarrollos decimales de dichos números no se estabilizan necesariamente. Por ejemplo, si

$$a_{2k} = 1,\underbrace{0\ldots0}_{k \text{ veces}}11\ldots \quad (k=1,\ 2,\ \ldots),$$
$$a_{2k+1} = 0,\underbrace{9\ldots9}_{k \text{ veces}}11\ldots \quad (k=1,\ 2,\ \ldots),$$

la sucesión $\{a_n\}$ tiene un límite igual a 1 ($a_n \to 1$), no obstante, lo que es fácil de ver, dicha sucesión no se estabiliza.

EJEMPLO 1. Demos a conocer una nueva demostración de la igualdad (compárese con el ejemplo 8 del § 2.1)

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0, \quad |q| < 1. \tag{4}$$

Sea, por ahora, $q \geqslant 0$. En este caso la variable q^n ($n = 1, 2, \ldots$) no crece y está acotada inferiormente por el número 0. Pero, entonces, existe, de acuerdo con el teorema 1, un número $A \geqslant 0$, hacia el cual tiende q^n:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = A.$$

Tenemos también

$$A = \lim_{n\to\infty} q^{n+1} = q \lim_{n\to\infty} q^n = qA,$$

de donde $A(1-q) = 0$ y $A = 0$, puesto que $q < 1$.

Si ahora $q < 0$, entonces, en virtud de lo demostrado ya, $|q^n| = |q|^n \to 0$, $n \to \infty$.

La igualdad (4) está completamente demostrada.

Esta demostración de (4) es, quizás, más exquisita en comparación con aquella que se ha aducido en el ejemplo 8 del § 2.1, pero ella no presta la posibilidad de apreciar la velocidad con la que q^n tiende a cero: no se pone de manifiesto con toda la eficacia el número $n_0 = n_0(\varepsilon)$, a partir del cual $|q^n| < \varepsilon$.

EJEMPLO 2. Es válida la igualdad

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \tag{5}$$

donde a es un número arbitrario.

Para $|a| \leqslant 1$ la igualdad es obvia. Sea $a > 1$. Hagamos

$$u_n = \frac{a^n}{n!}.$$

Entonces,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{a}{n+1}\to 0 \quad (n\to\infty).$$

De aquí proviene que $u_{n+1}<u_n$, $\forall n>n_0$, donde n_0 es suficientemente grande.

De este modo, la variable u_n decrece cuando $n>n_0$. Además, está acotada inferiormente por el número 0. Pero, en este caso existe el límite

$$\lim_{n\to\infty} u_n = A \geqslant 0.$$

Mas, se verifica también

$$A=\lim_{n\to\infty} u_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(u_n\frac{a}{n+1}\right)=A\lim_{n\to\infty}\frac{a}{n+1}=A\cdot 0=0,$$

y se ha demostrado, pues, la igualdad (5) para cualquier $a\geqslant 0$. Esta igualdad queda verídica también para cualquier $a<0$, puesto que

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right|=\frac{|a^n|}{n!}\to 0 \text{ cuando } n\to\infty$$

§ 2.6. Número e

Examinemos una sucesión

$$\{x_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}.$$

Mostremos que esta sucesión es creciente y está acotada superiormente. En virtud de la fórmula para el binomio de Newton

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k,$$

tenemos

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\frac{1}{n}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{n!}\times$$
$$\times\frac{1}{n^n}=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots$$
$$\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \quad (1)$$

De la igualdad dada se ve que la sucesión $x_n\geqslant 2$, $\forall n$. Demostremos que la sucesión $\{x_n\}$ está acotada superiormente. De la igualdad (1)

tenemos

$$x_n \leqslant 2+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\leqslant 2+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{k-1}}+\ldots+\frac{2}{2^{n-1}}\leqslant$$
$$\leqslant 1+\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots\right)=1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3.$$

Señalemos que la sucesión $\{x_n\}$ es creciente. Por analogía con (1) tenemos

$$x_{n+1}=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots$$
$$\ldots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right). \qquad (2)$$

Comparando (1) y (2) vemos que $x_n < x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbf{N}$ (en (2) cada sumando es mayor que el sumando correspondiente en (1), y, en adición, hay un sumando positivo de sobre). De acuerdo con el teorema 1 del § 2.5, la sucesión $\{x_n\}$ converge. Designemos su límite mediante la letra e, como lo propuso por primera vez L. Euler:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

De lo dicho se pone claro que $2<e<3$. El valor más exacto es

$$e=2{,}718281\ \ldots\ .$$

En adelante (en el § 4.16) se demostrará la fórmula, de la cual proviene que

$$e=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{\theta}{n!}\quad (n>2), \qquad (3)$$

donde θ es cierto número, dependiente de n, que satisface las desigualdades $0<\theta<1$. Con ayuda de esta fórmula no es difícil demostrar que e es un número irracional. Admitamos que $e=p/q$, donde p y q son naturales. Entonces, al hacer en (3) $n=q$, tendremos

$$\frac{p}{q}=\sum_{k=0}^{q}\frac{1}{k!}+\frac{\theta}{q!}$$

Al multiplicar por $q!$, obtenemos

$$p\,(q-1)!-l=\theta, \qquad (4)$$

donde $l=q!\sum_{k=0}^{q}\frac{1}{k!}$ es un número natural. Hemos obtenido una contradicción: el primer miembro de (4) es un número entero, mientras que el segundo miembro, igual a θ, es una fracción propia.

§ 2.7. Principio de segmentos encajados

TEOREMA 1 (PRINCIPIO DE SEGMENTOS ENCAJADOS). *Sea dada una sucesión de segmentos*

$$\sigma_n = [a_n, b_n] \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

encajados uno en otro (es decir, de tal índole que $\sigma_{n+1} \subset \sigma_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$*), cuyas longitudes tienden a cero:*

$$d_n = b_n - a_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

En este caso existe un punto (número) c, *y este punto es único, que pertenece a la vez a todos los segmentos* σ_n $(c \in \sigma_n,\ n = 1, 2, \ldots)$.

Demostración. Es evidente que

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant b_m$$

para cualquier m natural prefijado. Esto es indicio de que los números a_n no decrecen y están acotados superiormente por el número b_m para cualquier m, y, de conformidad con el teorema 1 del § 2.5, existe un número c hacia el cual tiende la variable a_n ($\lim a_n = c$). En este caso $a_n \leqslant c \leqslant b_m$. Por cuanto n y m naturales en estas desigualdades son arbitrarios, entonces, en particular, $a_n \leqslant c \leqslant b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Por consiguiente, $c \in \sigma_n$, cualquiera que sea $n \in \mathbf{N}$.

El punto determinado c es único. Admitamos que existe otro punto $c_1 \in \sigma_n$, $\forall n$. Entonces, $a_n \leqslant c$, $c_1 \leqslant b_n$, de donde

$$b_n - a_n \geqslant |c - c_1| > 0,\ \forall n,$$

pero esto contradice lo que $b_n - a_n \to 0$.

Observación. En el teorema 1 es esencial que se consideran en él los segmentos $[a_n, b_n]$ y no los intervalos, como lo muestra el siguiente ejemplo. Los intervalos $(0, 1/n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ están encajados uno en el otro, su longitud $d_n = \frac{1}{n} - 0 = \frac{1}{n} \to 0$, pero no existe ningún punto que pertenezca a la vez a todos los intervalos mencionados.

En efecto, cualquier punto $c \leqslant 0$ no pertenece a ninguno de los intervalos $(0, 1/n)$. En cambio, si $c > 0$, se encontrará tal n que $1/n < c$ y $c \in (0, 1/n)$.

§ 2.8. Cotas exactas superior e inferior de un conjunto

Examinemos un conjunto arbitrario E de números reales x. Puede suceder que en este conjunto haya un número máximo que se designará con M. En tal caso se escribe

$$M = \max E = \max_{x \in E} x.$$

Puede suceder también que entre los números $x \in E$ haya un número mínimo, igual a m. En este caso se escribe

$$m = \text{mín } E = \text{mín}_{x \in E} x.$$

Si el conjunto E es finito, es decir, consiste de un número finito de números

$$x_1, x_2, \ldots, x_p,$$

entre ellos siempre habrá un número máximo y un número mínimo.

No será siempre así, sin embargo, si E es un conjunto infinito.

He aquí unos ejemplos:

1) $\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$,
2) $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$,
3) $\mathbf{N}_- = \{\ldots, -2, -1\}$,
4) $[a, b]$,
5) $[a, b)$,
6) (a, b).

El conjunto $\mathbf{Z}$ no tiene números máximo y mínimo. El intervalo (a, b) tampoco los tiene. En este caso no importa si los números a, b son finitos o infinitos. Cualquiera que sea el número $c \in (a, b)$, es decir, un número que satisface las desigualdades $a < c < b$, siempre existen los números c_1, c_2 de tal género que $a < c_1 < c < < c_2 < b$.

El conjunto $\mathbf{N}$ no tiene un elemento máximo, pero tiene el mínimo $x = 1$. En cambio, el conjunto $\mathbf{N}_-$ cuenta con un elemento máximo $x = -1$, pero está privado de elemento mínimo.

Es obvio también que $\text{mín } [a, b] = a$, $\text{máx } [a, b] = b$, $\text{mín } [a, b) = a$, sin embargo, el número máximo en $[a, b)$ está ausente.

Surge, pues, la cuestión sobre la introducción de los números para el conjunto arbitrario E, que sustituirán, en lo posible, máx E y mín E. El papel de tales números (finitos o infinitos) lo desempeñan la *cota superior exacta*

$$\sup E = \sup_{x \in E} x = M$$

y la cota inferior exacta

$$\inf E = \inf_{x \in E} x = m$$

del conjunto.

Supongamos que el conjunto E está acotado superiormente.

El número M (finito) se denomina *cota superior exacta* del conjunto E, si para dicho número se cumplen dos condiciones:

1) $x \leqslant M$, $\forall x \in E$,

2) para todo $\varepsilon > 0$ existe un punto $x_1 \in E$ tal que se verifican las desigualdades

$$M - \varepsilon < x_1 \leqslant M.$$

En otras palabras, $\sup E = M$ es la menor de las cotas superiores (mayorantes).

Supongamos ahora que el conjunto E está acotado inferiormente.

El número m (finito) se denomina *cota inferior exacta* del conjunto E, siempre que para dicho número se cumplen dos condiciones:

1) $m \leqslant x$, $\forall x \in E$,

2) para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un punto $x_1 \in E$ tal que

$$m \leqslant x_1 < m + \varepsilon,$$

es decir, $\inf E = m$ es la mayor de las cotas inferiores.

Está claro que si en el conjunto E de números reales hay un número máximo (mínimo), es decir, si existe $\max E$ ($\min E$), entonces

$$\sup E = \max E \quad (\inf E = \min E).$$

Las abreviaturas sup, inf de las palabras latinas «supremum» e «infimum» significan superior e inferior, respectivamente. Esta terminología no es del todo acertada, puesto que, por ejemplo, $\sup E$ no es siempre el elemento máximo en el conjunto E.

EJEMPLO 1. Un conjunto

$$E = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots\right\} = \left\{\frac{n}{n+1}\right\}$$

tiene un número mínimo que es igual a 1/2 ($\min E = 1/2$). No obstante, está privado de número máximo, porque $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} \ldots$ Pese a esto, está acotado superiormente por el número 1 o cualquier otro número superior a 1. Pero, el número 1 desempeña un papel exclusivo: representa en sí la cota superior exacta de E ($\sup E = 1$).

Efectivamente:

1) $\frac{n}{n+1} < 1$, $\forall n \in \mathbf{N}$,

2) para $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_1 \in \mathbf{N}$: $1 - \varepsilon < \frac{n_1}{n_1+1} < 1$.

Hemos definido, pues, la cota superior (inferior) exacta para un conjunto acotado superiormente (inferiormente).

Si un conjunto E no está acotado superiormente (inferiormente), será natural que se llame su cota superior (inferior) exacta el símbolo $+\infty$ ($-\infty$): $\sup E = +\infty$ ($\inf E = -\infty$, respectivamente).

A veces, cuando no existe el peligro de confusión, en lugar de $+\infty$ se escribe simplemente ∞.

EJEMPLOS. Para los conjuntos 1)—6), aducidos más arriba, tienen lugar:

$$\sup \mathbf{Z} = +\infty, \qquad \inf \mathbf{Z} = -\infty,$$
$$\sup \mathbf{N} = \infty, \qquad \inf \mathbf{N} = \text{mín}\, \mathbf{N} = 1,$$
$$\sup \mathbf{N}_- = \text{máx}\, \mathbf{N}_- = -1, \qquad \inf \mathbf{N}_- = -\infty,$$
$$\sup (a, b) = b, \qquad \inf (a, b) = a,$$

donde a y b son los números que pueden ser tanto finitos como infinitos.

Se puede dar la definición general de cota superior (inferior) exacta de un conjunto, la que es válida para cualquier conjunto (acotado o no acotado).

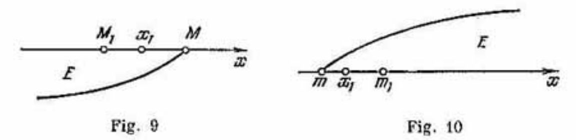


Fig. 9 Fig. 10

Un número M (m, respectivamente), finito o infinito, lleva el nombre de *cota superior* (*inferior*) *exacta* del conjunto E (figs. 9 y 10) siempre que se cumplan las condiciones:

1) $x \leqslant M$ $(m \leqslant x)$, $\forall x \in E$;

2) para cualquier número (¡finito!) $M_1 < M$ $(m_1 > m)$ existe $x_1 \in E$ tal que $M_1 < x_1 \leqslant M$ $(m \leqslant x_1 < m_1)$.

Con esta enunciación no nos vemos obligados a emplear la diferencia $M - \varepsilon$ (la suma $m + \varepsilon$), esto no tiene sentido para $M = +\infty$ $(m = -\infty)$.

Resulta válido el siguiente teorema de principio.

TEOREMA 1. *Si un conjunto no vacío de números reales E está acotado superiormente (inferiormente) por un número finito K (k, respectivamente), entonces existe un número $M \leqslant K$ $(m \geqslant k)$ que es la cota superior (inferior) exacta de E.*

Demostración. Puesto que E es un conjunto no vacío, en él está contenido por lo menos un punto x_0. Examinemos un segmento $\sigma_0 = [a, b]$, donde $a < x_0$, $b = K$.

Por hipótesis, a la derecha de σ_0 no hay puntos de E. Dividamos σ_0 en dos partes iguales (dos segmentos) y designemos mediante σ_1 la más derecha mitad que contiene al menos un punto de E. Esto se debe entender en el sentido de que si ambas partes (mitades) contienen los puntos de E, entonces σ_1 es la derecha de estas mitades, y si los puntos de E están contenidos sólo en una de ellas, precisamente esta parte se designa mediante σ_1.

Denotemos con x_1 algún punto de E perteneciente a σ_1. De este modo, $x_1 \in \sigma_1$, pero a la derecha de σ_1 no hay puntos de E. Dividimos ahora σ_1 en dos segmentos iguales y designamos mediante σ_2 el más derecho de estos segmentos que

contiene al menos un punto de E, el cual se designará con x_2. A la derecha de σ_2 no hay puntos de E.

Al continuar este proceso por inducción, obtendremos una sucesión de segmentos encajados $\sigma_n = [a_n, b_n]$ ($\sigma_n \supset \sigma_{n+1}$), cuyas longitudes son

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Además, sea cual fuera $n \in N$, a la derecha de σ_n no hay puntos de E, pero σ_n contiene un cierto punto $x_n \in E$.

En virtud del principio de segmentos encajados, existe un único punto, que se designará con M, perteneciente a todos los segmentos σ_n ($M \in \sigma_n$, $\forall n$).

Demostremos que

$$M = \sup E. \tag{1}$$

Efectivamente:

1) tiene lugar la desigualdad $x \leqslant M$, $\forall x \leqslant E$, porque si x es algún punto perteneciente a E, entonces $x \leqslant b_n$, $\forall n$; pasando al límite para $n \to \infty$, obtendremos

$$x \leqslant M = \lim_{n\to\infty} b_n, \quad \forall x \in E;$$

2) para cualquier $\varepsilon > 0$, $\exists x' \in E$ se tiene

$$M - \varepsilon < x' \leqslant M. \tag{2}$$

En efecto, los puntos x_n, definidos más arriba, pertenecen a σ_n y a E, respectivamente, es decir, $a_n \leqslant x_n \leqslant M$, y, como $a_n \to M$, $n \to \infty$, entonces para todo $\varepsilon > 0$, $\exists n_0$

$$M - \varepsilon < a_{n_0} \leqslant x_{n_0} \leqslant M,$$

y hemos obtenido (2), si consideramos que $x' = x_{n_0}$.

Un teorema correspondiente, que afirma la existencia de la cota inferior exacta en un conjunto acotado inferiormente E, se demuestra del modo análogo, partiendo del segmento $\sigma_0 = [a, b]$ (en el que está contenido cierto punto $x_0 \in E$) tal que $a = k$ y $x_0 < b$. Dividimos σ_0 en dos segmentos iguales y designamos ahora mediante σ_1 la mitad izquierda extrema que contiene los puntos de E, luego encontramos en σ_1 el punto $x_1 \in E$ y continuamos este proceso por inducción.

Todo lo dicho anteriormente nos conduce a la siguiente afirmación: *cada conjunto E tiene las cotas exactas superior e inferior. Si E está acotado superiormente, entonces* $\sup E < \infty$, *si, en cambio, E no está acotado superiormente, se tiene* $\sup E = \infty$. *Análogamente, si E está acotado inferiormente, entonces* $\inf E > -\infty$, *y si E no está acotado inferiormente*, $\inf E = -\infty$.

PROBLEMAS

1. Sean dados unos conjuntos de números reales $X = \{x\}$, $Y = \{y\}$. Por conjunto $\{x + y\}$ se entenderá toda una serie de las sumas de números $x \in X$ e $y \in Y$. Demuéstrese que

$$\sup \{x + y\} = \sup \{x\} + \sup \{y\},$$
$$\inf \{x + y\} = \inf \{x\} + \inf \{y\}.$$

2. Por conjunto $\{xy\}$ se entenderá toda una serie de productos de los números no negativos $x \in X$ e $y \in Y$. Demuéstrese que

$$\sup \{xy\} = \sup \{x\} \sup \{y\}, \quad \inf \{xy\} = \inf \{x\} \inf \{y\}$$
$$(x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0).$$

3. Demuéstrese que

$$\sup_{x \in A} (-x) = -\inf_{x \in A} x, \quad \inf_{x \in A} (-x) = -\sup_{x \in A} x.$$

§ 2.9. Teorema de Bolzano—Weierstrass [1]

Sea dada una sucesión arbitraria de números reales $\{x_n\}$. Elijamos de ella un conjunto infinito de elementos con los números $n_1 < n_2 < \ldots$. Obtendremos una nueva sucesión $\{x_{n_k}\}$ que se denomina *subsucesión de la sucesión* $\{x_n\}$. De la sucesión dada se pueden elegir una infinidad de tales subsucesiones.

Si la sucesión $\{x_n\}$ converge (a un número finito, a $+\infty$ o $-\infty$), toda subsucesión de ella converge, evidentemente, también y, además, al mismo número (finito, $+\infty$ ó $-\infty$).

Una sucesión

$$\{1, -1, 1, -1, \ldots\} \tag{1}$$

puede intervenir como un ejemplo de una sucesión de números que no converge. No obstante, vemos que dicha sucesión contiene una subsucesión

$$\{1, 1, 1, \ldots\},$$

que converge (a 1). Surge una pregunta si es siempre así que cualquier sucesión de números reales contiene una subsucesión que converge a cierto número (finito, $+\infty$, $-\infty$). La respuesta positiva a esta pregunta da el

TEOREMA 1. *En toda sucesión de números reales $\{x_n\}$ puede seleccionarse una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ convergente a un número finito o bien a $+\infty$, o bien a $-\infty$.*

En el caso en que la sucesión $\{x_n\}$ no esté acotada superiormente (inferiormente), contiene, evidentemente, una subsucesión que tiende a $+\infty$ (a $-\infty$), lo que demuestra el teorema. Si, en cambio, la sucesión está acotada, el teorema 1 se reduce al siguiente

TEOREMA 2 (DE BOLZANO—WEIERSTRASS). *En toda sucesión acotada $\{x_n\}$ puede seleccionarse una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ que converge a cierto número.*

Demostración. Como la sucesión de puntos $\{x_n\}$ está acotada, todos los puntos pertenecen a cierto segmento $[a, b]$ que se designará

[1] Bolzano B. (1781—1848), un matemático checo; Weierstrass K. (1815—1897), un matemático alemán.

mediante σ_0. Dividamos σ_0 en dos segmentos iguales y denotemos con σ_1 el más derecho de ellos que contiene una infinidad de elementos x_n. Uno de estos últimos elementos se designará con x_{n_1}. Si hay algo a la derecha de σ_1, será un número finito de los puntos x_n. Dividamos σ_1 en dos segmentos iguales y denotemos con σ_2 el más derecho de ellos que contiene un número infinito de elementos x_n. Elijamos entre estos elementos un elemento x_{n_2} con el número $n_2 > n_1$. Si hay puntos x_n a la derecha de σ_2, habrá un número finito de ellos.

Continuemos este proceso por inducción. Como resultado, obtenemos una sucesión de segmentos $\sigma_k = [a_k, b_k]$ encajados uno en el otro, cuyas longitudes $b_k - a_k \to 0$, $k \to \infty$, y una subsucesión de los puntos de nuestra sucesión tales que $x_{n_k} \in \sigma_k$ ($n_1 < n_2 < \ldots$). En tal caso, a la derecha de cada uno de los segmentos habrá no más de un número finito de elementos x_n.

Según el principio de segmentos encajados, existe un punto c que pertenece a cualquiera de los segmentos σ_k. Es obvio que la subsucesión $\{x_{n_k}\}$ tiene como su límite el punto c ($x_{n_k} \to c$), y el teorema queda así demostrado.

§ 2.10. Límites superior e inferior

Dada una sucesión arbitraria de números reales $\{x_n\}$, se puede de acuerdo con el teorema 1 del § 2.9, analizar diversas subsucesiones convergentes que se engendran por esta sucesión. Los límites de dichas subsucesiones convergentes suelen llamarse *límites parciales* de la sucesión $\{x_n\}$.

Según la definición, se denomina *límite superior de la sucesión* $\{x_n\}$ (o de la *variable* x_n) un número M (finito, $+\infty$ ó $-\infty$) que posee las siguientes propiedades:

1) Existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de la sucesión $\{x_n\}$, que converge a M:

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = M.$$

2) Para cualquier subsucesión convergente $\{x_{n_k}\}$ de la sucesión $\{x_n\}$

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} \leqslant M.$$

El límite superior de la sucesión $\{x_n\}$ se designa con uno de los símbolos

$$M = \overline{\lim}\, x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{n\to\infty} \sup_{k>n} x_k.$$

Si la sucesión $\{x_n\}$ no está acotada superiormente, entonces, evidentemente:

$$\overline{\lim}\, x_n = +\infty.$$

En la sucesión $\{(-1)^n\}$ la variable x_n tiene $\overline{\lim}\, x_n = 1$.

He aquí un ejemplo más:

$$\{n^{(-1)^n}\} = \left\{1,\ 2,\ \frac{1}{3},\ 4,\ \frac{1}{5},\ \ldots\right\}.$$

Esta sucesión (variable) no está acotada superiormente. Por consiguiente, su límite superior

$$\overline{\lim}\, n^{(-1)^n} = +\infty.$$

Para la sucesión $\{x_n\}$, acotada superiormente, su límite superior M puede ser definido también del modo siguiente: para cualquier $\varepsilon > 0$ quizás haya a la derecha de $M + \varepsilon$ un número finito de puntos x_n; en cambio, a la derecha de $M - \varepsilon$ hay, a ciencia cierta, un número infinito de puntos x_n.

Observemos que si la sucesión $\{x_n\}$tiene un límite habitual (finito) $\lim x_n = M$, entonces, como sabemos, para cualquier $\varepsilon > 0$, las desigualdades $M - \varepsilon < x_n < M + \varepsilon$ se cumplen para todo x_n, a excepción del número finito de ellos. De este modo, a la derecha de $M + \varepsilon$ hay a lo sumo un número finito de elementos x_n, y a la derecha de $M - \varepsilon$ hay, a ciencia cierta, una infinidad de ellos.

Esto muestra que también $M = \overline{\lim}\, x_n$.

Así pues, si $M = \lim x_n$, entonces también $\overline{\lim}\, x_n = \lim x_n = M$.

Pero, la diferencia entre un límite habitual y un límite superior es que en el caso del límite habitual a la izquierda de $M - \varepsilon$ hay a lo sumo un número finito de los puntos x_n, y en el caso del límite superior a la izquierda de $M - \varepsilon$ puede haber también un número infinito de los puntos x_n.

Por definición, se denomina *límite inferior de la sucesión* $\{x_n\}$ (o de la *variable* x_n) un número m (finito, $+\infty$ ó $-\infty$), que posee las siguientes propiedades:

1) Existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de la sucesión $\{x_n\}$ que converge a m:

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = m.$$

2) Para cualquier subsucesión convergente $\{x_{n_k}\}$ de la sucesión $\{x_n\}$

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} \geqslant m.$$

El límite inferior de la variable x_n se denota mediante uno de los símbolos

$$m = \underline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}_{n\to\infty}\, x_n = \lim_{n\to\infty} \inf x_n.$$

Si la sucesión $\{x_n\}$ no está acotada inferiormente, entonces, evidentemente:

$$\underline{\lim}\, x_n = -\infty.$$

Para una sucesión acotada inferiormente el límite inferior puede ser definido también del modo siguiente: para cualquier $\varepsilon > 0$ quizás haya a la izquierda de $m - \varepsilon$ un número finito de puntos (elementos) x_n, en cambio, a la izquierda de $m + \varepsilon$ hay, a ciencia cierta, un número infinito de puntos (elementos) x_n.

Es obvio que

$$\underline{\lim}\, x_n \leqslant \overline{\lim}\, x_n. \tag{1}$$

TEOREMA 1. *Para que una sucesión $\{x_n\}$ tenga un límite (finito, $+\infty$ ó $-\infty$), es necesario y suficiente que $\overline{\lim}\, x_n = \underline{\lim}\, x_n$, y, en este caso, $\lim x_n = \underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x$.*

Observemos que si $\overline{\lim}\, x_n = -\infty$, entonces, en virtud de (1), $\underline{\lim}\, x_n = -\infty$, y, según el teorema 1,

$$\lim x_n = -\infty.$$

Es obvio también que de la igualdad $\underline{\lim}\, x_n = +\infty$ se desprende que

$$\overline{\lim}\, x_n = \lim x_n = +\infty.$$

Observación. Se puede mostrar que el número c, obtenido al demostrar el teorema de Bolzano — Weierstrass, es un límite superior de x_n:

$$\overline{\lim}\, x_n = c.$$

Esto se deduce de lo que a la derecha de todo segmento σ_n hay a lo sumo un número finito de puntos x_n.

Por otra parte, al modificar el proceso, eligiendo en cada etapa de la división de σ_n en dos segmentos iguales no el más derecho de ellos, sino el más izquierdo que contenga una infinidad de los puntos x_n, obtendríamos, posiblemente, el otro punto c', comprendido en todos los σ_n, y este último punto sería el límite inferior de x_n ($\underline{\lim}\, x_n = c'$).

Si la variable x_n no tiene límite, entonces, a ciencia cierta, $c' < c$; si, en cambio, el límite de x_n existe, ambos procesos conducirán forzosamente a un mismo número $c = c'$.

§ 2.11. Condición de Cauchy para la convergencia de una sucesión

Sea dada una sucesión de números reales $\{x_n\}$ que converge a un límite finito a:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Esto significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un número $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que

$$|x_n - a| < \varepsilon/2, \quad \forall n > n_0.$$

A la par con el número natural $n > n_n$ podemos sustituir en esta desigualdad otro número natural $m > n_0$:

$$|x_m - a| < \varepsilon/2, \quad \forall m > n_0.$$

Entonces,

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leqslant |x_n - a| + |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall n, m > n_0.$$

Hemos obtenido la afirmación siguiente: *Si la variable x_n tiene un límite finito, para ella se cumple la condición* (de Cauchy [1]): *para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que*

$$|x_m - x_n| < \varepsilon, \quad \forall n, m > n_0.$$

Una sucesión de los números que satisface la condición de Cauchy se denomina, además, *sucesión fundamental*.

---

[1]) Cauchy O. L. (1789—1857), un matemático francés. Fue primero en definir los conceptos fundamentales del análisis matemático (límite, continuidad, integral, ...) que se han conservado intactos en las matemáticas modernas.

Resulta que es válida también una afirmación inversa: *si una sucesión de números reales $\{x_n\}$ es fundamental, es decir, satisface la condición de Cauchy, entonces tiene un límite, es decir, existe un número a (finito) tal que $x_n \to a$, $n \to \infty$.*

Demostración. Comencemos por demostrar que una sucesión fundamental está acotada. Efectivamente, hagamos $\varepsilon = 1$ y elijamos, de acuerdo con la condición de Cauchy, un número $n_0 = n_0(1)$ de una manera tal que

$$|x_n - x_m| < 1, \quad \forall n,\ m > n_0,$$

de donde

$$1 > |x_n - x_m| \geqslant |x_n| - |x_m|$$

o bien

$$1 + |x_m| \geqslant |x_n|, \quad \forall n,\ m > n_0. \tag{1}$$

Fijemos $m > n_0$ y denotemos

$$M = \max_{n \leqslant n_0} \{1 + |x_m|,\ |x_n|\},$$

es decir, el máximo de los números $|x_n|$, donde $n \leqslant n_0$ y del número $1 + |x_m|$. Entonces, en virtud de (1),

$$M \geqslant |x_n|, \quad \forall n \in N,$$

con lo que queda demostrado el carácter acotado de la sucesión $\{x_n\}$.

Según el teorema de Bolzano—Weierstrass, en una sucesión acotada $\{x_n\}$ puede seleccionarse una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ que converge a cierto número (finito) a, es decir,

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = a.$$

Probemos que en el caso dado no sólo la subsucesión mencionada, sino también toda la sucesión tiene a por su límite:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a.$$

En efecto, de conformidad con la condición de Cauchy que queda satisfecha por nuestra sucesión, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que

$$|x_n - x_m| < \varepsilon/2, \quad \forall n,\ m > n_0. \tag{2}$$

Por otra parte, en virtud de que $x_{n_k} \to a$ para $k \to \infty$, se puede indicar tal k_0 que

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon/2, \quad \forall k > k_0.$$

Al tomar en consideración que $n_k \to \infty$ para $k \to \infty$, se puede encontrar tal $k_1 > k_0$ que sea $n_{k_1} > n_0$. Por eso

$$|x_{n_{k_1}} - a| < \varepsilon/2. \tag{3}$$

En vista de (2), donde se debe poner $m = n_{k_1}$, y de (3), tenemos $|x_n - a| = |x_n - x_{n_{k_1}} + x_{n_{k_1}} - a| \leqslant$

$$\leqslant |x_n - x_{n_{k_1}}| + |x_{n_{k_1}} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \ \forall n > n_0,$$

y demostramos que la sucesión $\{x_n\}$ tiene un límite igual a a.

Así pues, queda demostrado el

TEOREMA 1 (CRITERIO DE CAUCHY PARA LA EXISTENCIA DE UN LÍMITE). *Para que una sucesión de números reales $\{x_n\}$ tenga un límite, es necesario y suficiente que dicha sucesión sea fundamental (satisfaga la condición de Cauchy).*

§ 2.12. Completitud y continuidad de un conjunto de números reales

En los párrafos anteriores hemos demostrado toda una serie de propiedades de los números reales; más abajo vienen las más importantes de ellas:

1) La existencia de un límite que tiene una sucesión monótona acotada (§ 2.5, teorema 1).

2) El principio de segmentos encajados (§ 2.7, teorema 1).

3) La existencia de la cota superior exacta con la que cuenta un conjunto acotado arbitrario (§ 2.8, teorema 1).

4) La convergencia de una sucesión fundamental a un límite (criterio de Cauchy, § 2.11, teorema 1).

Aunque las propiedades citadas parecen distintas, de hecho están ligadas entre sí por una relación interior profunda. No es tan difícil mostrar que las afirmaciones 1) — 4) son equivalentes (siempre que están presentes las propiedades I—IV del número), es decir, de una cualquiera de ellas provienen las tres restantes. En este libro se ha mostrado que de 1) (o, que es lo mismo, de la propiedad V, véase el § 1.6) y de las propiedades I—IV se deducen 2), 3), 4).

Las propiedades 1) — 4) se llaman, en adición, *propiedades de completitud* o *continuidad* del conjunto de todos los números reales.

Con el objeto de aclarar su papel, examinemos un conjunto solamente de números racionales el cual se designará con Q.

Las propiedades I—IV para los números racionales se cumplen. Sin embargo, la propiedad V y, por consiguiente, cualquiera de las propiedades 1)—4) no se cumplen, en el caso general, para los números racionales.

Expliquémoslo con un ejemplo. Con este fin resulta cómodo operar también con el conjunto de todos los números reales que se designará mediante R.

Prefijemos una fracción decimal infinita no periódica

$$a = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots .$$

De este modo, a es un número irracional, es decir, $a \in$ R, pero $a \notin$ Q. La fracción a genera una sucesión de números truncados

$$a^{(n)} = a_0, a_1 \ldots a_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

(que son racionales) la cual no decrece y está acotada superiormente por el número entero $a_0 + 1$. No existe un número racional al que converja nuestra sucesión de números racionales $\{a^{(n)}\}$. Efectivamente, sabemos que la variable $a^{(n)}$ converge hacia a (véase el ejemplo 9, § 2.1), es decir, hacia un número irracional y no puede converger a otro número.

Hemos mostrado que la propiedad 1) en Q no se cumple en el caso general.

No es difícil probar que las propiedades 2), 3), 4) en el caso general tampoco se cumplen en Q.

Un conjunto de números reales se denomina *completo*, debido a que para él se cumple la propiedad 4) consistente en que cualquier sucesión fundamental de números converge a cierto número real.

El conjunto Q de números racionales no es completo. Dicho conjunto contiene sucesiones fundamentales que no convergen a los números racionales. Agregando a Q los números irracionales, obtenemos un conjunto de números reales que ya es completo.

Capítulo 3

Función. Límite de una función

§ 3.1. Función

Sea E un conjunto de números y supongamos que en virtud de cierta ley bien determinada a todo número x de E se le ha puesto en correspondencia un (solo) número y; en este caso se dice que en E está definida una *función* (unívoca), la cual se escribe así:

$$y = f(x) \quad (x \in E). \tag{1}$$

Dicha definición de la función fue propuesta por N.I. Lobachevski y Dirichlet [1]). El conjunto E recibe el nombre de campo de definición de la función $f(x)$. Suele decirse también que está dada una variable independiente x la cual puede tomar valores particulares de x del conjunto E, y a cualquier $x \in E$ se le ha puesto en correspondencia, en virtud de la ley mencionada, un valor determinado (número) de otra variable y, llamada *función* o *variable dependiente*. La variable independiente se denomina *argumento*.

Para expresar el concepto de función se utiliza el lenguaje geométrico. Se dice que está dado un conjunto E de puntos x de una recta real (*un dominio de definición de la función*) y la ley, en virtud de la cual a todo punto $x \in E$ se le asigna un número $y = f(x)$.

Hablando de una función como de cierta ley que pone en correspondencia a todo número $x \in E$ otro número y, resulta suficiente designarla con una letra f. El símbolo $f(x)$ denota un número y, el cual, en virtud de la ley f, corresponde al valor $x \in E$. Si, por ejemplo, el número 1 pertenece al dominio E de definición de la función f, entonces $f(1)$ es *el valor de la función* f en el punto $x = 1$. Si 1 no pertenece a E ($1 \notin E$), se dice que la función f *no está definida* en el punto $x = 1$.

Un conjunto E_1 de todos los valores de $y = f(x)$, donde $x \in E$, se denomina *imagen* del conjunto E creada con ayuda de la función f. A veces se escribe en este caso $E_1 = f(E)$. Sin embargo, esta última designación debe emplearse con cautela, explicándola en lo posible cada vez cuando se utilice para que no sea confusión con la designación $y = f(x)$, donde x es un punto (número) arbitrario perteneciente al conjunto E, mientras que y es un punto del conjunto E_1 que se

[1]) Lobachevski N. I. (1792—1856), un gran matemático ruso, creador de la geometría no euclidiana. Dirichlet L.P.G. (1805—1859), un matemático alemán.

pone correspondiente a x con ayuda de la función (la ley f). Se dice, además, que la función f *aplica* el conjunto E *sobre* el conjunto E_1.

Si la imagen $E_1 = f(E) \subset A$, donde A es un conjunto de números que, en general, no coincide con E_1, dicen que la función f *aplica* E *en* A.

Para las funciones f y φ, definidas en un mismo conjunto E, se determinan *la suma* $f+\varphi$, *la diferencia* $f-\varphi$, *el producto* $f\varphi$, *el cociente* f/φ. Éstas son unas funciones nuevas cuyos valores se expresan mediante las fórmulas correspondientes

$$f(x)+\varphi(x),\quad f(x)-\varphi(x),\quad f(x)\varphi(x),\quad \frac{f(x)}{\varphi(x)}\ (x\in E), \tag{2}$$

en las que se supone en el caso del cociente que $\varphi(x) \neq 0$ en E.

Para la designación de las funciones, se emplean también otras letras cualesquiera: F, Φ, Ψ, . . ., al igual que en lugar de x, y se pueden escribir z, u, v, ...

Si la función f aplica el conjunto E en E_1, y la función F aplica el conjunto E_1 en el conjunto E_2, la función $z = F(f(x))$ se denomina *función de función*, o bién *función compuesta*, o bien *superposición* de f y F. Está definida en el conjunto E y aplica E en E_2.

Puede existir una función compuesta en cuya formación participan n funciones: $z = F_1(F_2(F_3(\ldots(F_n(x))\ldots)))$.

En la práctica se encuentran varios ejemplos de las funciones. Por ejemplo, el área S de un círculo es una función de su radio r, expresada mediante la fórmula $S = \pi r^2$. Esta función está definida, evidentemente, en el conjunto de todos los números positivos r.

Podríamos hablar, sin ligar la cuestión con el área del círculo, sobre la dependencia que existe entre las variables S y r, expresada mediante la fórmula $S = \pi r^2$. La función $S = \varphi(r)$, prefijada por esta fórmula, está definida en todo el eje real, es decir, definida para todos los números reales r que no sean necesariamente positivos.

Más abajo vienen los ejemplos de funciones definidas por las fórmulas:

$$1)\ y=\sqrt{1-x^2},\quad 2)\ y=\lg(1+x),\quad 3)\ y=x-1,$$

$$4)\ y=\frac{x^2-1}{x-1},\quad 5)\ y=\operatorname{arcsen} x.$$

Tenemos en cuenta las funciones reales que toman valores reales y para los valores reales del argumento x. No es difícil ver que los dominios de definición de las funciones aducidas son:

1) segmento $[-1, 1] = \{-1 \leqslant x \leqslant 1\}$;
2) conjunto $x > -1$;
3) todo el eje real;
4) todo el eje real del cual está excluido el punto $x = 1$;
5) segmento $[-1, 1]$, respectivamente.

Las funciones definidas en los ejemplos 1) y 2) pueden considerarse como funciones de una función: 1) $y = \sqrt{u}$, $u = 1 - v$, $v = x^2$; 2) $y = \lg u$, $u = 1 + x$.

De medio sustancial para definir una función sirve la gráfica. Fijemos un sistema rectangular de coordenadas x, y (fig. 11), marquemos en el eje x un segmento $[a, b]$ y expongamos cualquier curva Γ que posea las siguientes propiedades: cualquiera que sea el punto $x \in [a, b]$, toda recta que pasa por el punto citado y es paralela al eje y corta la curva Γ en un solo punto A. Tal curva Γ, dada en el sistema rectangular (cartesiano) de coordenadas, se denominará *gráfica*. La gráfica define una función $y = f(x)$ en el segmento $[a, b]$ de la manera siguiente. Si x es un punto arbitrario del segmento $[a, b]$, el valor correspondiente de $y = f(x)$ se determina como ordenada del punto A (véase la fig. 11). Por consiguiente, con ayuda de la gráfica se da una ley bien determinada de correspondencia entre x e $y = f(x)$.

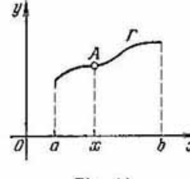


Fig. 11

Hemos definido la función con ayuda de una gráfica en el conjunto E que representa el segmento $[a, b]$. En otras circunstancias E puede representar un intervalo, un semi-intervalo, todo el eje real, un conjunto de números racionales pertenecientes al intervalo dado, etc.

Definamos en cierto intervalo (a, b) una función $f(x)$ y un número arbitrario (constante) $\alpha \neq 0$. Sirviéndose de α y f, se pueden construir una serie de funciones: 1) $\alpha f(x)$; 2) $f(x) + \alpha$; 3) $f(x - \alpha)$; 4) $f(\alpha x)$. Las funciones 1) y 2) están definidas en el mismo intervalo (a, b). Las ordenadas de la gráfica de la función 1) están aumentadas en α veces en comparación con las ordenadas correspondientes $f(x)$. La gráfica de la función 2) se obtiene de la gráfica de f, elevando la última a una magnitud α (si $\alpha > 0$) y bajándola a la magnitud $|\alpha|$ (si $\alpha < 0$); la gráfica de la función 3) se obtiene de la gráfica de f, desplazándose la última a la derecha a la magnitud α, si $\alpha > 0$, y a la izquierda a $|\alpha|$, siempre que $\alpha < 0$. Por fin, la función 4) está, evidentemente, definida, cuando $\alpha > 0$, en el intervalo $(a/\alpha, b/\alpha)$; su gráfica se obtiene de la gráfica de f, comprimiéndose esta última uniformemente en α veces.

La función f se denomina *par* o *impar*, si está definida en un conjunto simétrico respecto del punto nulo y posee en dicho conjunto la propiedad $f(-x) = f(x)$ o bien la propiedad $f(-x) = -f(x)$. La gráfica de una función par es, obviamente, simétrica respecto del eje y, y la gráfica de una función impar es simétrica respecto del origen de coordenadas. Por ejemplo, x^{2k} (k es natural), $\cos x$, $\lg |x|$,

$\sqrt{1+x^2}$, $f(|x|)$ son todas funciones pares, mientras que x^{2k+1} ($k \geqslant 0$ y es entero), $\operatorname{sen} x$, $x\sqrt{1+x^2}$, $xf(|kx|)$ son funciones impares.

No es difícil ver que *un producto de dos funciones pares o de dos funciones impares será una función par, y un producto de una función par por otra impar será una función impar.*

Desde luego, la mayoría de las funciones son no pares y no impares.

La gráfica de una función $y = f(x)$, $x \in E$, puede ser determinada, además, como una totalidad de puntos $(x, f(x))$ de abscisa x y ordenada $f(x)$, donde $x \in E$.

Una función f se denomina *creciente* (*no decreciente*) en E, si para cualesquiera $x_1, x_2 \in E$, para los cuales $x_1 < x_2$, se verifica la desigualdad $f(x_1) < f(x_2)$ $f(x_1) \leqslant f(x_2)$).

Una función f se llama *decreciente* (*no creciente*) en E, si para cualesquiera $x_1, x_2 \in E$, para los cuales $x_1 < x_2$, se verifica la desigualdad $f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) \geqslant f(x_2)$).

Una función f se llama *acotada* (*no acotada*) en E, si su imagen $E_1 = f(E)$ creada con ayuda de f es un conjunto acotado (no acotado).

Por ejemplo, la función $y = 1/x$ decrece y no está acotada en $(0, \infty)$, pero sí está acotada en $[1, \infty)$.

Una función f, definida en todo el eje real, se denomina *periódica de período* $T > 0$, si $f(x) = f(x + T)$ para $\forall x$.

Se puede hablar también de una función periódica de período T en el intervalo (a, b) (en el segmento $[a, b]$), si la igualdad

$$f(x) = f(x + T)$$

se verifica para todos los $x \in (a, b)$ (o $[a, b]$) tales que para ellos es cierto $x + T \in (a, b)$ ($[a, b]$).

Por ejemplo, la función $\operatorname{sen} x$ de período 2π. La función $\operatorname{sen} mx$, donde $m \in \mathbb{N}$, es también de período 2π, pero, además, tiene un período menor $T = 2\pi/m$.

EJEMPLO 6. La función (*signo* x)

$$y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

está dada en el intervalo infinito $(-\infty, \infty)$. Es impar. Su imagen es un conjunto compuesto por tres puntos: $1, 0, -1$.

EJEMPLO 7. La función

$$y = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leqslant 0, \\ \operatorname{sen} x, & x > 0, \end{cases}$$

tiene la gráfica expuesta en la fig. 12. Decrece en $(-\infty, 0)$ y tiene el período igual a 2π en $(0, \infty)$. Esta función está definida mediante

diferentes fórmulas en las distintas partes de su dominio de definición.

Una función puede definirse en forma de una tabla. Por ejemplo, podríamos medir la temperatura de aire T cada hora. En este caso a cualquier momento de tiempo $t=0, 1, 2, \ldots, 24$ le correspondería un número determinado T en forma de una tabla:

t	0	1	...	24
T	T_0	T_1	...	T_{24}

De este modo, obtendríamos una función $T = f(t)$, definida en un conjunto de números enteros desde 0 hasta 24 y dada por medio de la tabla.

Si una función $y = f(x)$ viene dada en cierto conjunto E mediante una fórmula, siempre podemos considerar que a la función le corresponde una gráfica bien determinada que expresa geométricamente dicha función. Lo recíproco no está claro ni mucho menos: si una función viene dada por una gráfica arbitraria, ¿podrá expresarse mediante cierta fórmula? Es una cuestión muy compleja. Para resolverla, se debe dar cuenta del sentido que le asigna a la propia palabra fórmula. Más arriba, al decir que una función dada $y = f(x)$ se expresa mediante una fórmula, suponíamos tácitamente que en este caso y se obtenía a partir de x con ayuda de un número finito de tales operaciones como la adición, sustracción, multiplicación, división, extracción de una raíz de tal o cual grado, determinación por logaritmos, el cálculo de sen, cos, arcsen u otras operaciones algebraicas y trigonométricas.

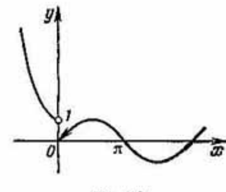


Fig 12

El análisis matemático ofrece los medios para ampliar considerablemente el concepto de fórmula. Un medio muy importante de esta índole es el desarrollo de la función en una serie infinita respecto de las funciones elementales.

Muchas y, quizás, todas las funciones que se encuentran en la práctica pueden ser expuestas por medio de una fórmula que representa cierta serie infinita cuyos términos están constituidos por las funciones elementales que se definirán más abajo. Pero no es el tiempo de hablar sobre esto ahora mismo, pues no estamos preparados todavía.

De una manera u otra, sea dada la función $f(x)$ mediante una fórmula o por medio de algún otro método, por ejemplo, con ayuda de una gráfica, ella ya es un objeto de estudio para el análisis matemático, siempre que dicha función satisfaga ciertas propiedades adicionales generales, a saber, la continuidad, la monotonía, la convexidad, la derivabilidad, etc. Pero todo esto se tratará más abajo.

Un medio importantísimo del estudio de una función es el concepto de límite que constituye el concepto fundamental del análisis matemático. El presente capítulo está dedicado precisamente a este concepto.

Si a todo número x perteneciente a un conjunto dado de números E le corresponde, en virtud de cierta ley, un conjunto determinado e_x de números y, dicen que por medio de la ley citada queda definida una *función multiforme* $y = f(x)$. Si resulta que e_x se compone sólo de un número y para cada $x \in E$, obtenemos una función uniforme o unívoca.

Una función unívoca se denomina simplemente «función» sin añadir el adjetivo «unívoca», siempre que esto no conduzca a una confusión.

El álgebra y la trigonometría nos proporcionan los ejemplos de funciones multiformes: a título de tales funciones intervienen $\sqrt{x}$, Arcsen x, Arctg x, ...

La función $\sqrt{x}$ está definida para $x \geqslant 0$. Es biforme para $x > 0$: a todo número positivo x corresponden dos números reales (que se diferencian uno del otro en signo), cuyos cuadrados son iguales a x. Además, el símbolo $\sqrt[k]{x}$ ($k = 2, 3, \ldots$) se entenderá siempre, si no se especifica lo contrario, como un valor aritmético de la raíz de k-ésimo grado de $x \geqslant 0$, es decir, como un número no negativo cuya k-ésima potencia es igual a x (véase el § 3.8). En lo que se refiere a la función Arcsen x, es de infinitos valores. Ella pone en correspondencia a cada valor de x, perteneciente al segmento $[-1, 1]$ una infinidad de valores de y, los cuales pueden escribirse según la fórmula

$$y = (-1)^k \operatorname{arcsen} x + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Hasta ahora hemos tratado las funciones de una sola variable. Pero, se puede hablar también de las funciones de dos, tres y, en general, de n variables.

Una función de dos variables se define de la manera siguiente. Se analiza un conjunto E de pares de números (x, y). Se tienen en cuenta en este caso los pares *ordenados*. Esto significa que dos pares (x_1, y_1) y (x_2, y_2) se consideran iguales (coincidentes) cuando, y sólo cuando, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. Si a cada par $(x, y) \in E$ se le ha puesto en correspondencia, en virtud de cierta ley, un número z, se dice que con esto queda definida en el conjunto E una *función* $z = f(x, y)$ de dos variables x e y.

Por cuanto a cada par de números (x, y) le corresponde en un plano, en el que está introducido el sistema cartesiano de coordenadas, un punto de abscisa x y ordenada y, y, viceversa, a todo punto le corresponde, de este modo, un par (x, y), podemos decir que nuestra función $f(x, y)$ está definida en el conjunto E de puntos de un plano.

La función $z = f(x, y)$ de dos variables se expone en el espacio tridimensional, en el que está dado un sistema rectangular de coordenadas (x, y, z), en forma del lugar geométrico de puntos $(x, y, f(x, y))$, cuyas proyecciones (x, y) pertenecen al conjunto E de definición de f.

Por ejemplo, para la función

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \leqslant 1,$$

en calidad de tal lugar geométrico interviene la mitad superior de la superficie esférica de radio 1 y centro en el punto nulo.

Del mismo modo puede definirse una función de tres variables. Como dominio de su definición puede ahora servir cierto conjunto de las ternas ordenadas de números (x, y, z) o bien, que es lo mismo, de los puntos que les corresponden de un espacio tridimensional en el que está introducido un sistema cartesiano de coordenadas.

Si a cada terna de números (a cada punto de un espacio tridimensional) $(x, y, z) \in E$ le corresponde, en virtud de cierta ley, un número u, se dice que con esto queda definida en E una función $u = F(x, y, z)$

Análogamente puede considerarse un conjunto E de los sistemas ordenados $(x_1, \ldots, x_n)$ de n números, donde n es un número natural prefijado. En este caso también, si a todo sistema de esta índole perteneciente a E le corresponde, en virtud de cierta ley, un número z, se dice que z es una *función de las variables* $x_1, \ldots, x_n$, definida en el conjunto E y dicha función se escribe en la forma $z = F(x_1, \ldots, x_n)$.

Cuando $n > 3$, ya no tenemos en nuestra disposición un espacio real n-dimensional que pueda ser empleado para representar los sistemas $(x_1, \ldots, x_n)$ en forma de los puntos que le pertenezcan a dicho espacio. Sin embargo, los matemáticos inventaron el espacio n-dimensional que les sirve impecablemente y, además, de una manera no peor que un espacio tridimensional real. A saber, se llama *espacio n-dimensional* un conjunto de toda una serie de sistemas de n números $(x_1, \ldots, x_n)$.

Si dos funciones f y φ de n variables vienen dadas en un mismo conjunto E de sistemas $(x_1, \ldots, x_n)$, es decir, de puntos de un espacio n-dimensional, se puede definir la suma $f + \varphi$, la diferencia $f - \varphi$, el producto $f\varphi$ y el cociente f/φ como funciones, definidas sobre E con ayuda de las igualdades análogas a las igualdades (2), donde sólo se requiere que los números x sean sustituidas por los sistemas $(x_1, \ldots, x_n)$. De un modo natural se definen también las funciones compuestas del tipo $f(\varphi(x, y), \psi(x, y, z)) = F(x, y, z)$, donde (x, y, z) son las ternas de números pertenecientes a cierto conjunto de ternas.

Abajo vienen unos cuantos ejemplos de las funciones de varias variables dadas por medio de las fórmulas elementales.

EJEMPLO 8. $u = Ax + By + Cz + D$ (donde A, B, C, D son unos números prefijados reales y constantes) es una función lineal de tres variables (x, y, z). Está definida en todo el espacio tridimensional. Una función lineal más general de n variables $(x_1, \ldots, x_n)$ viene definida mediante la fórmula $u = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b$, donde $a_1, \ldots, a_n$, b son unos números constantes prefijados. Esta función está definida en cualquier punto $(x_1, \ldots, x_n)$ del espacio n-dimensional o bien, como también se dice, en todo el espacio n-dimensional.

EJEMPLO 9. $z = \lg \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Dicha función real está definida en un dominio que representa un círculo de radio 1 y centro en (0, 0), del cual están excluidos todos los puntos de frontera, es decir, los puntos de la circunferencia de radio 1 cuyo centro está dispuesto en (0, 0). Para estos últimos puntos nuestra función no está definida, pues lg 0 no tiene sentido.

EJEMPLO 10. La función

$$z = f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{para } y \geqslant 0, \\ 1 & \text{para } y < 0 \end{cases}$$

se expone geométricamente por dos semiplanos paralelos que no están ligados entre sí. Su disposición con relación al sistema de coordenadas (x, y, z) es obvia.

Una función de una sola variable puede definirse *implícitamente* con ayuda de la igualdad

$$F(x, y) = 0, \tag{3}$$

donde F es una función de dos variables x e y.

Supongamos que en cierto conjunto G de puntos (x, y) viene dada una función F. La igualdad (3) determina cierto subconjunto Ω del conjunto G, en el cual la función F es igual a cero. Desde luego, en particular, Ω puede representar un conjunto vacío. Sea Ω un conjunto no vacío y supongamos que E es un conjunto (no vacío, evidentemente de aquellos valores de x (números), a los cuales corresponde al menos un valor de y de modo tal que el par x, y pertenezca a Ω. Así pues, E es un conjunto de todos los números x, a cada uno de los cuales corresponde un conjunto no vacío e_x de números y de tal modo que $(x, y) \in \Omega$ o bien, que es lo mismo, para el par citado (x, y) se verifique la igualdad (3). Con ello queda definida en el conjunto E cierta función de x: $y = \varphi(x)$ que es, en general, multiforme. En este caso suele decirse que la función φ *está definida implícitamente* con ayuda de la igualdad (3). Para ella se cumple, obviamente, la identidad

$$F(x, \varphi(x)) \equiv 0 \quad \text{para todo} \quad x \in E.$$

Por analogía, podemos definir también una función $x = \psi(y)$ de la variable y, que se define implícitamente con ayuda de la igualdad (3). Para ella se cumple la identidad

$$F(\psi(y), y) \equiv 0 \quad \text{para todo} \quad y \in E_1.$$

donde E_1 es un conjunto de números. Dicen, además, que la función $y = \varphi(x)$ (ó $x = \psi(y)$) satisface la ecuación (3). La función $x = \psi(y)$ se denomina *inversa* respecto de la función $y = \varphi(x)$.

EJEMPLO 11. La ecuación

$$x^2 + y^2 = r^2, \tag{4}$$

donde $r > 0$, define implícitamente una función biforme de una sola variable:

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2} \quad (-r \leqslant x \leqslant r);$$

no obstante, para $x = \pm r$ es uniforme. Es natural considerar que la citada función biforme se descompone en dos funciones uniformes continuas $y = +\sqrt{r^2 - x^2}$ e $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ $(-r \leqslant x \leqslant r)$. Sus gráficas (semicircunferencias) proporcionan en totalidad una circunferencia de radio r con centro en el origen de coordenadas. Dicha circunferencia es un lugar geométrico de los puntos cuyas coordenadas (x, y) satisfacen la ecuación (4). Pero, valiéndose de la fórmula (4), se pueden construir diversas funciones uniformes (discontinuas) que satisfagan la ecuación (4). Por ejemplo, una función de este tipo es

$$y = \begin{cases} +\sqrt{r^2 - x^2}, & -r \leqslant x < 0, \\ -\sqrt{r^2 - x^2}, & 0 \leqslant x \leqslant r. \end{cases}$$

§ 3.2. Límite de una función

Un número A recibe el nombre de *límite de la función f en el punto a*, si dicha función está definida en cierto entorno de a, es decir en cierto intervalo (c, d), donde $c < a < d$, a excepción, quizás, del mismo punto a, y si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ (dependiente de ε) tal que para todo x, para el cual $0 < |x - a| < \delta$, tiene lugar la desigualdad

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

El hecho de que A es el límite de f en el punto a suele escribirse de la manera siguiente:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A, \quad \text{o bien} \quad f(x) \to A \ (x \to a).$$

Una definición más del límite de la función en un punto puede enunciarse en términos de los límites de las sucesiones.

El número A se denomina *límite de la función en el punto a*, si dicha función está definida en cierto entorno del punto a, excepto, quizas, el propio punto a, y si el límite de la sucesión $\{f(x_n)\}$ existe y es igual a A, cualquiera que sea la sucesión $\{x_n\}$ convergente hacia

a y tal que $x_n \neq a$ para todo n. De este modo,

$$\lim_{\substack{x_n \to a \\ x_n \neq a}} f(x_n) = A.$$

Al igual que en los otros casos semejantes, aquí se admite sin ninguna duda que la variable x_n que tiende hacia a recorre los valores, para los cuales $f(x)$ queda definida.

Las definiciones enunciadas son equivalentes. En efecto, supongamos que la función f tiene un límite en el sentido de la primera definición y sea x_n una variable que es distinta de a con n cualquiera y que tiende hacia a. Prefijemos ε y elijamos δ tal como se indica en la primera definición. Luego seleccionemos n_0 natural de una manera tal que sea $|x_n - a| < \delta$ para $n > n_0$. Pero, en este caso,

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon \quad \text{para} \quad n > n_0,$$

lo que significa que la sucesión de números $\{f(x_n)\}$ tiende hacia A, y, como esta propiedad es verídica para cualquier sucesión $\{x_n\}$ (que tiende hacia a) con tal de que sea $x_n \neq a$ y todos los x_n pertenezcan al dominio de definición de la función, entonces queda, pues, demostrado que de la primera definición del límite se deduce la segunda.

Viceversa, supongamos que la función $f(x)$ tiene un límite en el sentido de la segunda definición. Admitamos, además, que en este caso ella no tiene límite en el sentido de la primera definición. Esto es indicio de que existe por lo menos un solo ε, el cual se designará mediante ε_0, para el cual no se puede elegir δ requerido, es decir, para *cualquier* δ entre los x que satisfacen las correlaciones $0 < |x - a| < \delta$ debe existir aunque sea un único $x = x^{(\delta)}$ tal que para él $|f(x^{(\delta)} - A| \geqslant \varepsilon_0$.

A título de δ tomamos todos los números del tipo $\delta = 1/k$ ($k = 1, 2, \ldots$) y para cada uno de ellos encontramos un punto $x_k = x^{(\delta)}$ tal que

$$0 < |x_k - a| < 1/k \quad (x_k \neq a)$$

y

$$|f'(x_k) - A| \leqslant \varepsilon_0 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

De estas relaciones se ve que $x_k \to a$ ($x_k \neq a$), mientras que $f(x_k)$ no tiende a ciencia cierta hacia el número A. De este modo, la admisión de que de la segunda definición del límite no se deduce la primera conduce a una contradicción.

La equivalencia de dos definiciones está demostrada.

La expresión *el límite de una función en el punto a* se sustituye a menudo por la otra *el límite de una función para x que tiende hacia a*, o, más brevemente, *el límite de una función para $x \to a$*. En cualquier caso esta expresión corresponde más al espíritu del concepto de límite, porque la expresión $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ caracteriza el comportamiento

de la función en un entorno pequeño del punto a, del cual el propio punto a está extraído. Dicha expresión muestra que si x se aproxima hacia a de acuerdo con una ley cualquiera, quedando siempre distinto de a, entonces el valor correspondiente de $f(x)$ se aproxima, a su vez, hacia A, es decir, se hace tan cercano a A como se quiera.

EJEMPLO 1. Analicemos una función $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$. Está definida para todo $x \neq 2$. Trataremos de encontrar su límite para $x \to 2$. Se tiene, para cualquier $x \neq 2$, $\frac{x^2-4}{x-2} = x + 2$, y, como, al definir el límite para $x \to 2$, de ningún modo se toman en consideración los valores de la función f en el punto $x = 2$, entonces

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} (x+2).$$

Esta igualdad está escrita por ahora en el sentido de que si uno de los límites existe, tiene lugar también el segundo y es, además, igual al primer límite. De este modo, en lugar de calcular el límite de una función más compleja $(x^2 - 4)/(x - 2)$, resulta suficiente calcular el límite de la función más simple $x + 2$. Es obvio que este último límite es igual a 4 para $x \to 2$. En efecto, si en $x + 2$ sustituimos x por una variable arbitraria x_n que tiende hacia 2, entonces

$$\lim_{x_n\to 2} (x_n+2) = 2+2 = 4,$$

no importa que sea el modo de que x_n tienda a 2.

Los cálculos, relacionados con la búsqueda del límite dado, se realizan, corrientemente, de la manera siguiente:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} (x+2) = \lim_{x\to 2} x+2 = 4.$$

Subrayemos que las funciones $f(x) = (x^2 - 4)/(x - 2)$ y $\varphi(x) = x + 2$ son diferentes. La primera de ellas está definida para $x \neq 2$, mientras que la segunda está definida para cualquier x. No obstante, al calcular el límite de las funciones para $x \to 2$, no nos importa si dichas funciones están definidas o no en el mismo punto $x = 2$, y, como $f(x) = \varphi(x)$ para $x \neq 2$, resulta

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \varphi(x) = \varphi(2).$$

EJEMPLO 2. Es obvio que $\lim\limits_{x\to 1} x^2 = 1$, porque si $x_n \to 1$, $x_n \neq 1$, entonces $\lim x_n^2 = \lim x_n \cdot \lim x_n = 1 \cdot 1 = 1$. Este hecho puede demostrarse también en el lenguaje de ε y δ. Definamos un intervalo cualquiera que contenga el punto 1, por ejemplo, $(1/2, 3/2)$. Para todo x perteneciente a este intervalo se verifica, evidentemente, la

desigualdad

$$|x^2-1|=|x+1|\,|x-1|\leqslant\frac{5}{2}|x-1|.$$

Prefijemos ahora arbitrariamente $\varepsilon>0$ y pongamos $\delta=\min\left\{\frac{1}{2},\ \frac{2}{5}\varepsilon\right\}$. En este caso para todo x, que satisface la desigualdad $|x-1|<\delta$, tendrá lugar la relación

$$|x^2-1|\leqslant\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{5}\varepsilon=\varepsilon.$$

EJEMPLO 3. La función sen $(1/x)$ está definida para todos los valores de $x\neq 0$ y es impar (su gráfica para $x>0$ se expone en la fig. 13). Está definida, por consiguiente, en un entorno del punto $x=0$, a excepción del mismo punto $x=0$. Esta función no tiene límite para $x\to 0$, porque la sucesión de valores $x_k=2/\pi\,(2k+1)$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$, distintos de cero, tiende a cero y al mismo tiempo

$$f(x_k)=(-1)^k$$

no tiende, para $k\to\infty$, a ningún límite.

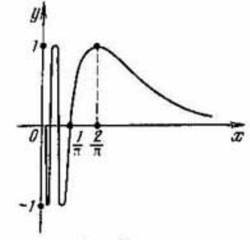


Fig. 13

Introduzcamos una definición más. Escribiremos

$$A=\lim_{x\to\infty}f(x)$$

y diremos que *el número A es un límite de la función $f(x)$ (cuando x tiende al infinito)*, si f está definida para todos los x que satisfacen la desigualdad $|x|>K$, para cierto $K>0$, y para cualquier $\varepsilon>0$ se puede encontrar un número $M>K$ tal que $|f(x)-A|<\varepsilon$, cualquiera que sea x que satisfaga la desigualdad $|x|>M$.

Se puede demostrar que esta definición es equivalente a la que sigue.

El número A es un límite de la función $f(x)$ para $x\to\infty$, si la función $f(x)$ está definida para todos los x con $|x|>M$, para cierto M, y

$$\lim_{x_n\to\infty}f(x_n)=A$$

para cualquier sucesión $\{x_n\}$ que converge hacia ∞.

La demostración de la equivalencia para estas dos definiciones mencionadas se realiza siguiendo el mismo esquema que se ha utilizado en el caso analizado anteriormente de un límite de f en el punto finito a.

En general, muchas propiedades de los límites de $f(x)$ para $x \to a$, donde a es un número finito, y para $x \to \infty$ son análogas. Podemos enunciar estas propiedades de tal modo único que la enunciación será válida simultáneamente tanto para el caso en que $x \to a$, donde a es un número finito, como para el caso en que $x \to \infty$. Con este fin por letra a se debe entender o bien un número (finito), o bien el símbolo ∞. Si a es un número, por entorno del punto a se entenderá cualquier intervalo (c, d) que comprende el punto a. De este modo, *el entorno del punto (finito) a* es un conjunto de todos los puntos x que satisfacen las desigualdades $c < x < d$. Si $a = \infty$ (o bien $+\infty$, o bien $-\infty$), por entorno a se extenderá un conjunto de todos los x que satisfacen la desigualdad

$$|x| > M \quad (\text{ó } x > M, \quad \text{o bien} \quad x < -M, \quad M > 0).$$

Escribiremos

$$\lim_{x \to a} f(x) = A,$$

donde a puede ser un número finito o bien ∞ (o bien $+\infty$, o bien $-\infty$), si la función $f(x)$ está definida en cierto entorno de a, excepto, quizás, el propio punto a (esta especificación es necesaria sólo en el caso en que a es un punto finito) y si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe tal entorno del punto a que para todos los x, pertenecientes a dicho entorno y distintos de a, se verifica la desigualdad

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Esta definición reúne, evidentemente, ambos casos analizados más arriba para el límite de f: cuando x tiende hacia un número finito a y cuando x tiende hacia ∞, $+\infty$, $-\infty$.

La función f, para la cual $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, recibe el nombre de *infinitésimo para $x \to a$.*

Procedamos a exponer las propiedades de la función $f(x)$ que tiene límites cuando $x \to a$, dondo a es un número, o bien ∞, $+\infty$, $-\infty$. Convengamos en designar un entorno arbitrario de a con el símbolo $U(a)$. Es fácil comprobar que *la intersección de dos entornos $U_1(a)$ y $U_2(a)$ es, nuevamente, cierto entorno $U(a)$.*

TEOREMA 1. *Si $\lim_{x \to a} f(x) = A$, donde A es un número finito, entonces en cierto entorno $U(a)$ la función $f(x)$ está acotada, es decir, existe tal número positivo M que*

$$|f(x)| \leqslant M \quad \textit{para cualquier} \quad x \in U(a), \quad x \neq a.$$

Demostración. De la hipótesis del teorema se deduce la existencia de tal entorno $U(a)$ que

$$1 > |f(x) - A| \geqslant |f(x)| - |A| \quad (x \in U(a),\ x \neq a).$$

De aquí, para los x mencionados

$$|f(x)| \leqslant 1 + |A|,$$

donde se debe considerar $M = 1 + |A|$. El teorema está demostrado.

TEOREMA 2. *Si* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ *y* $A \neq 0$ *es un número finito, existe un entorno* $U(a)$ *tal que*

$$|f(x)| > |A|/2 \quad (x \in U(a),\ x \neq a).$$

Más aún, para los x *indicados*

$$f(x) > A/2, \quad si \quad A > 0,$$

y

$$f(x) < A/2, \quad si \quad A < 0.$$

Demostración. De la hipótesis del teorema proviene la existencia de tal entorno $U(a)$ para $\varepsilon = |A|/2$ que

$$|A|/2 > |A - f(x)| \geqslant |A| - |f(x)| \quad (x \in U(a),\ x \neq a),$$

de donde $|f(x)| > |A|/2$ para los x indicados. La primera de las desigualdades citadas puede sustituirse por las siguientes:

$$A - \frac{|A|}{2} < f(x) < A + \frac{|A|}{2}.$$

De aquí se infiere para $A > 0$:

$$\frac{A}{2} = A - \frac{|A|}{2} < f(x),$$

y para $A < 0$ proviene que

$$f(x) < A + \frac{|A|}{2} = \frac{A}{2},$$

lo que se trataba de demostrar.

TEOREMA 3. *Si*

$$\lim_{x \to a} f_1(x) = A_1, \quad \lim_{x \to a} f_2(x) = A_2$$

y en cierto entorno $U(a)$, $x \neq a$, *se verifica*

$$f_1(x) \leqslant f_2(x)$$

entonces $A_1 \leqslant A_2$.

Demostración. Sea $x_n \to a$, $x_n \neq a$; entonces para n_0 suficientemente grande tiene lugar la desigualdad

$$f_1(x_n) \leqslant f_2(x_n) \quad (n > n_0)$$

y, pasando al límite, la desigualdad $A_1 \leqslant A_2$.

TEOREMA 4. *Si*

$$\lim_{x\to a} f_1(x)=A, \quad \lim_{x\to a} f_2(x)=A \tag{1}$$

y sobre cierto entorno $U(a)$, $x\neq(a)$,

$$f_1(x)\leqslant \varphi(x)\leqslant f_2(x) \tag{2}$$

entonces

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=A. \tag{3}$$

Demostración. Supongamos que $x_n\to a$, $x_n\neq a$; entonces, con n_0 suficientemente grande tenemos, para $n>n_0$:

$$f_1(x_n)\leqslant\varphi(x_n)\leqslant f_2(x_n)$$

y, en virtud de (1), existe un límite de $\varphi(x_n)$ igual a A, y, como $\{x_n\}$ es una sucesión arbitraria que converge hacia a, resulta válida la expresión (3).

TEOREMA 5 (CRITERIO DE CAUCHY PARA LA EXISTENCIA DEL LÍMITE). *Para que exista el límite (finito)* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, *es necesario y suficiente que la función* $f(x)$ *esté definida en un entorno de* a, *excepto, quizás, el propio punto* a, *y que para todo* $\varepsilon>0$ *existe un entorno* $U(a)$ *tal que se verifique*

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon,$$

cualesquiera que sean los puntos $x', x''\in U(a)$, $x', x''\neq a$.

Demostración. Sea $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, donde A es un número finito; en este caso existe un entorno de a, donde $f(x)$ está definida, a excepción, quizás, del mismo punto a. Además, para cualquier $\varepsilon>0$ se encontrará un entorno $U(a)$ tal que si $x\in U(a)$, $x\neq a$, se tiene $|f(x)-A|<\varepsilon/2$. Supongamos que $x', x''\in$ $\in U(a)$ y $x', x''\neq a$; entonces

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant|f(x')-A|+|A-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

y hemos llegado, pues, a que la condición del teorema es necesaria.

Demostremos la suficiencia de la condición citada. Supongamos que la función $f(x)$ está definida en cierto entorno de a, excepto, quizás, el mismo punto a, y que, además, para cualquier $\varepsilon>0$ podemos indicar tal entorno $U(a)$ que $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$, cualesquiera que sean $x', x''\in U(a)$, $x', x''\neq a$. Prefijemos una sucesión arbitraria $\{x_n\}$, $x_n\neq a$ $(n=1, 2, \ldots)$ que tiende hacia a. Entonces, de acuerdo con el criterio de Cauchy, para una sucesión que tiende hacia un límite se encontrará tal número n_0 que con $n, m>n_0$ tendremos $x_n, x_m\in U(a)$. Pero, en este caso

$$|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon \quad (n, m>n_0),$$

por lo cual la sucesión $\{f(x_n)\}$ satisface el criterio de Cauchy y, consecuentemente, tiene un límite.

Hemos demostrado la siguiente propiedad de la función en consideración f: para cualquier sucesión de números x_n convergente hacia a $(x_n\neq a)$ existe

$\lim f(x_n)$. De esta propiedad proviene automáticamente que los límites $\lim f(x_n)$, correspondientes a las diferentes sucesiones convergentes hacia a, son iguales entre sí. Pero, en tal caso existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. Efectivamente, supongamos que $x_n \to a$, $x'_n \to a$; $x_n, x'_n \neq a$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Entonces, de acuerdo con lo demostrado más arriba, existen unos números A y A' tales que $f(x_n) \to A$ y $f(x'_n) \to A'$. Formemos una sucesión nueva: $\{x_1, x'_1, x_2, x'_2, x_3, \ldots\}$. Dicha sucesión converge al número a. De conformidad con lo que hemos ya demostrado, debe también converger hacia cierto número la sucerión correspondiente $\{f(x_1), f(x'_1), f(x_2), f(x'_1), \ldots\}$. Pero esto es factible sólo cuando $A = A'$. De este modo, $A = A'$. El teorema está demostrado.

TEOREMA 6. *Sea*

$$\lim_{x\to a} f(x) = A, \quad \lim_{x\to a} \varphi(x) = B,$$

donde A y B son los números finitos. En este caso

$$\lim_{x\to a} [f(x) \pm \varphi(x)] = A \pm B, \ \lim_{x\to a} [f(x)\varphi(x)] = AB$$

y, a condición de que $B \neq 0$,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{B}.$$

Demostremos, como un ejemplo, la segunda igualdad. Supongamos que $x_n \to a$, $x_n \neq a$ $(n = 1, 2, \ldots)$; entonces

$$\lim f(x_n) = A, \quad \lim \varphi(x_n) = B,$$

y al recordar que el límite de un producto de dos variables que recorren las sucesiones es igual al producto de sus límites, tenemos:

$$\lim [f(x_n)\varphi(x_n)] = \lim f(x_n) \lim \varphi(x_n) = AB.$$

Esta igualdad está demostrada para cualquier variable $x_n \to a$, $x_n \neq a$, razón por la cual $\lim\limits_{x\to a} [f(x)\varphi(x)] = AB$.

Según la definición, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, siempre que la función $f(x)$ queda definida en cierto entorno de a, excepto, quizás, el mismo punto a, y si para todo número positivo M existe tal entorno $U(a)$ del punto a que

$$|f(x)| > M \quad (x \in U(a),\ x \neq a).$$

Una función, para la cual $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, recibe el nombre de *infinitamente grande cuando* $x \to a$.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ y si en cierto entorno del punto a la función $f(x) > 0$ $(f(x) < 0$, respectivamente), se escribe, además, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ $(\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, respectivamente)

Es fácil demostrar los siguientes teoremas.

TEOREMA 7. *Si una función $f(x)$ satisface en cierto entorno de a la desigualdad*

$$|f(x)| > M > 0,$$

y para la función $\varphi(x)$ tiene lugar

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = 0 \quad (\varphi(x) \neq 0 \text{ para } x \neq 0),$$

entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty.$$

TEOREMA 8. *Si* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \infty$ *(A es un número), entonces*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0.$$

COROLARIO. *Si* $\varphi(x) \to 0$ $(x \to a,\ \varphi(x) \neq 0)$, *se tiene*

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{\varphi(x)} = \infty,$$

y si $\varphi(x) \to \infty$ $(x \to a,\ \varphi(x) \neq 0)$, *entonces*

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{\varphi(x)} = 0.$$

Se puede definir, además, el límite de una función f en el punto (finito) a por la derecha (por la izquierda).

Según la definición, el número A se llama límite de una función f en el punto a por la derecha (por la izquierda), si dicha función está definida en cierto semi-intervalo $(a, b]$ ($[b, a)$) y si para ella existe

$$\lim_{\substack{x_n\to a\\ x_n>a}} f(x_n) = A \ \Big(\lim_{\substack{x_n\to a\\ x_n<a}} f(x_n) = A, \text{ respectivamente}\Big),$$

cualquiera que sea la sucesión mencionada $\{x_n\}$.

El límite por la derecha (por la izquierda) de la función f en el punto a se denota del modo siguiente:

$$f(a+0) = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x), \tag{4}$$

$$f(a-0) = \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x). \tag{5}$$

Si f está definida en el intervalo (a, b), en el punto a puede tener sentido sólo el número $f(a+0)$, y en el punto b, sólo el número $f(b-0)$.

Observación. Las igualdades

$$f(a+0)=f(a-0)=A \tag{6}$$

son equivalentes a la existencia del límite

$$\lim_{x\to a} f(x)=A. \tag{7}$$

En efecto, (6) puede expresarse del modo siguiente: $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$: $|f(x)-A|<\varepsilon$, $\forall x$: $0<|x-a|<\delta$, $x>a$; $|f(x)-A|<\varepsilon$, $\forall x$: $0<|x-a|<\delta$, $x<a$. Pero, lo mismo puede expresarse en la forma más breve: $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$: $|f(x)-A|<\varepsilon$, $\forall x$: $0<|x-a|<\delta$ lo que es equivalente a (7).

§ 3.3. Continuidad de la función

En la fig. 14 está expuesta la gráfica de una función $y=f(x)$ $(a\leqslant x\leqslant b)$. Es natural que la llamemos gráfica continua, pues puede ser trazada por un movimiento de un lápiz sin apartarla del

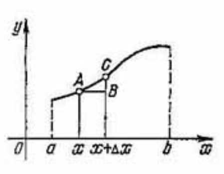


Fig. 14

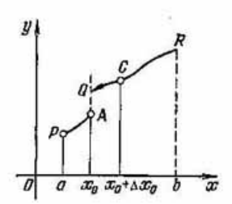


Fig. 15

papel en el que se dibuja la gráfica. Prefijemos un punto (número) arbitrario $x\in[a,b]$. El otro punto $x'\in[a,b]$, cercano de x, puede ser escrito así: $x'=x+\Delta x$, donde Δx es un número positivo o negativo, llamado *incremento de* x. La diferencia

$$\Delta f=\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

lleva el nombre de *incremento de la función* f en el punto x, correspondiente al incremento Δx. Se tiene en cuenta aquí tal Δx que $x+\Delta x\in[a,b]$. En la fig. 14 Δy es igual a la longitud del segmento BC.

Hagamos tender Δx hacia cero: es evidente en este caso que para la función en consideración Δy también va a tender hacia cero:

$$\Delta y\to 0\quad(\Delta x\to 0). \tag{1}$$

Veamos ahora la gráfica expuesta en la fig. 15. Está compuesta por dos trozos continuos PA y QR. Sin embargo dichos trozos no están unidos de manera continua, por lo cual será natural llamar la gráfica discontinua. Para conseguir que la gráfica exprese una función uniforme $y = F(x)$ en el punto x_0, convengamos en considerar que $F(x_0)$ es igual a la longitud del segmento que une A y x_0; con este fin el punto A está marcado en la gráfica por un círculo, mientras que el punto Q tiene dibujada una flecha que sirve de indicio de que Q no pertenece a la gráfica. Si el punto Q hubiera pertenecido a la gráfica, la función F habría sido biforme en el punto x_0.

Comuniquemos ahora a x_0 un incremento Δx_0 y determinemos el incremento correspondiente de la función:

$$\Delta F = F(x_0 + \Delta x) - F(x_0).$$

Al hacer tender Δx_0 a cero, ya no podemos decir que ΔF tenderá en este caso a cero. Para Δx_0 negativos que tienden a cero esta afirmación queda vigente, pero para Δx_0 positivos no será así: el dibujo nos muestra que si Δx_0 tiende a cero, quedando siempre positivo, el incremento correspondiente ΔF tiende al mismo tiempo a un número positivo igual a la longitud del segmento AQ.

Teniendo presentes los razonamientos aducidos, *llamaremos continua en el punto x del segmento $[a, b]$, a la función f, definida en dicho segmento, si su incremento en este punto, correspondiente al incremento Δx, tiende hacia cero, no importa el modo de que tiende a cero Δx.* La enunciación citada (propiedad de continuidad de f en x) se anota en forma de la relación (1) o bien de otra manera más:

$$\lim_{\Delta x \to a} \Delta y = 0. \tag{2}$$

La inscripción (2) se lee así: el límite de Δy es igual a cero cuando Δx tiende a cero según una ley cualquiera. La expresión «según una ley cualquiera» se omite corrientemente sin dejar de sobreentenderla.

Si la función f, definida en $[a, b]$, no es continua en el punto $x \in [a, b]$, es decir, si para dicha función no se cumple la condición (2), aunque sea para un único modo de que Δx tienda a cero, se llamará *discontinua* en el punto x.

La función expuesta en la fig. 14 es continua en cualquier punto $x \in [a, b]$, y la que está expuesta en la fig. 15 es, evidentemente, continua en cualquier punto $x \in [a, b]$, a excepción del punto x_0, porque para este último punto la relación (2) no se cumple cuando $\Delta x \to 0$ quedando siempre positivo.

Una función continua en todo punto del segmento (intervalo) se denomina *continua en dicho segmento (intervalo)*.

Toda función continua expresa matemáticamente una propiedad que se trata a menudo en la práctica consistente en que a un incremento pequeño de la variable independiente le corresponde un incre-

mento, también pequeño, de la variable (función) que depende de la primera. Como excelentes ejemplos de una función continua pueden servir diferentes leyes de movimiento de los cuerpos $s = f(t)$, que expresan la dependencia del camino s, recorrido por un cuerpo, del tiempo t. El tiempo y el espacio son continuos, con la particularidad de que una u otra ley de movimiento $s = f(t)$ establece entre ellos cierta relación continua que se caracteriza por el hecho de que a un incremento pequeño del tiempo le corresponde un incremento pequeño del camino.

A la abstracción de la continuidad un ser humano ha llegado observando los así llamados medios continuos que le rodeaban: sólidos, líquidos o gaseosos, por ejemplo, los metales, el agua o el aire. En realidad, todo medio físico representa en sí una acumulación del gran número de partículas móviles separadas una de la otra. Sin embargo, las partículas citadas y las distancias entre ellas son tan pequeñas en comparación con los volúmenes de los medios que se tratan en los fenómenos físicos macroscópicos que muchos de tales fenómenos pueden perfectamente estudiarse, si se considera aproximadamente que la masa del medio que se estudia está distribuida en el espacio ocupado por ella sin claros algunos. En la suposición de esta índole se basan varias asignaturas físicas, por ejemplo, la hidrodinámica, la aerodinámica, la teoría de elasticidad. La noción matemática de continuidad desempeña, naturalmente, en estas asignaturas, al igual que en varias otras, un papel considerable.

Las funciones continuas forman una clase fundamental de las funciones que son tratadas en el análisis matemático.

A título de ejemplo de las funciones continuas pueden servir funciones elementales (véase más abajo en el § 3.8). Son continuas en los intervalos de variación de x, donde están definidas.

Las funciones discontinuas en las matemáticas reflejan los procesos que se realizan en la naturaleza en forma de saltos. Por ejemplo, al suceder un golpe, la velocidad del cuerpo varía a saltos. Muchos cambios cualitativos se acompañan de saltos. Por ejemplo, la dependencia $Q = f(t)$ entre la temperatura de un gramo de agua (hielo) y la cantidad Q de calorías del calor que entraña el agua, cuando t varía entre $-10°$ y $+30°$ al tomar convencionalmente que para $-10°$ la magnitud de $Q = 0$, se expresa mediante las siguientes fórmulas:

$$Q(t) = \begin{cases} 0{,}5t + 5, & -10 \leqslant t < 0, \\ t + 85, & 0 < t \leqslant 30. \end{cases}$$

Consideramos que la capacidad calorífica del hielo es igual a 0,5. Cuanto $t = 0$, esta función resulta ser indeterminada, esto es, multiforme; para la mayor comodidad se puede convenir en que para $t = 0$ dicha función toma un valor bien determinado, por ejemplo, $f(0) =$

$= 45$. La función $Q = f(t)$ es, evidentemente, discontinua para $t = 0$ y está expresada en la fig. 16.

He aquí la definición de la continuidad de la función f en un punto.

La función $f(x)$ se denomina continua en el punto x_0, si está definida en cierto entorno de este punto, incluso en el mismo punto x_0, y si su incremento en el punto citado, correspondiente al incremento del argumento Δx, tiende hacia cero para $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0. \quad (3)$$

Si ponemos $x = x_0 + \Delta x$, obtendremos la siguiente definición equivalente para la continuidad de f en x_0: *la función f es continua en el punto x_0, si está definida en cierto entorno de dicho punto, incluso en el mismo punto x_0, y si*

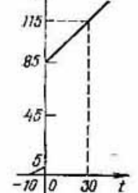


Fig. 16

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0); \quad (4)$$

o bien, además, en el lenguaje de ε, δ: si para todo $\varepsilon > 0$ existe tal $\delta > 0$ que

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \quad \forall x: |x - x_0| < \delta.$$

La igualdad (4) puede anotarse, en adición, del modo siguiente:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x). \quad (4')$$

Dicha igualdad muestra que *bajo el signo de una función continua se puede pasar al límite.*

EJEMPLO 1. La constante $y = C$ es una función continua en cualquier punto x. En efecto, al punto x le corresponde el valor de la función $y = C$, al punto $x + \Delta x$ corresponde el mismo valor $y(x + \Delta x) = C$. Por esto, $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = C - C = 0$, y

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0.$$

EJEMPLO 2. La función $y = x$ es continua para cualquier valor de x, porque $\Delta y = \Delta x$, y, por consiguiente, $\Delta y \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$.

EJEMPLO 3. La función $y = \operatorname{sen} x$ es continua para cualquier x. En efecto,

$$|\Delta y| = |\operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x| = \left| 2 \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \right| \leqslant$$
$$\leqslant 2 |\operatorname{sen}(\Delta x/2)|. \quad (5)$$

Pero, para cualquier α tiene lugar la desigualdad

$$|\operatorname{sen} \alpha| < |\alpha|. \quad (6)$$

Si $0 < \alpha < \pi/2$, la validez de la desigualdad citada proviene de la fig. 17, donde está expuesta una circunferencia de radio 1 (el arco de longitud 2α es mayor que su cuerda cuya longitud es igual a $2 \operatorname{sen} \alpha$). Para $\alpha = 0$ la desigualdad (6) se convierte en una igualdad. Si $0 < |\alpha| < \pi/2$, se tiene $|\operatorname{sen} \alpha| = \operatorname{sen} |\alpha| \leqslant |\alpha|$. Por fin si $|\alpha| > \pi/2$, entonces $|\operatorname{sen} \alpha| \leqslant 1 < \pi/2 \leqslant |\alpha|$. De (5) se deduce, en virtud de (6):

$$|\Delta y| \leqslant 2 \left| \operatorname{sen} \frac{\Delta x}{2} \right| \leqslant 2 \frac{|\Delta x|}{2} = |\Delta x|,$$

es decir

$$|\Delta y| \leqslant |\Delta x|.$$

Pero, en este caso es evidente que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Se puede añadir que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, a saber, $\delta = \varepsilon$ tal que

$$|\Delta y| < \varepsilon, \quad \forall \Delta x: \ |\Delta x| < \delta = \varepsilon.$$

Fig. 17

Demos a conocer un teorema de importancia.

TEOREMA 1. *Si las funciones f y φ son continuas en el punto $x = a$, serán también continuos en el mismo punto su suma, diferencia, producto y cociente (para $\varphi(a) \neq 0$).*

Este teorema se deduce inmediatamente del teorema 6 del § 3.2, si se tiene presente que en el caso dado

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x), \quad \varphi(a) = \lim_{x \to a} \varphi(x).$$

Resulta válido también el teorema importante sobre la continuidad de una función de función (de una función compuesta).

TEOREMA 2. *Sean dadas una función $f(u)$, continua en el punto $u = A$, y otra función $u = \varphi(x)$, continua en el punto $x = a$,* y supongamos que $\varphi(a) = A$. *Entonces, una función compuesta $F(x) = f[\varphi(x)]$* es continua en el punto $x = a$.

Demostración. Observemos que de acuerdo con la definición de continuidad de la función f en el punto A podemos concluir que dicha función está definida en cierto entorno del punto citado. Por eso

$$\lim_{x \to a} F(x) = \lim_{x \to a} f[\varphi(x)] = \lim_{u \to A} f[u] = f(A) = f[\varphi(a)] = F(a).$$

Aquí está introducida la sustitución $u = \varphi(x)$ y se ha tomado en consideración la continuidad de φ en el punto $x = a$: $\varphi(x) \underset{x \to a}{\to} \varphi(a) = A$.

EJEMPLO 4. Una función

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

donde a_k son unos coeficientes constantes, se denomina *polinomio* de n-ésimo grado. Es continua para x cualquiera. Efectivamente, para obtener $P(x)$, es necesario realizar, partiendo de los números constantes $a_0, \ldots, a_n$ y de la función de x, un número finito de operaciones aritméticas de adición, sustracción y multiplicación. Pero, una constante es la función continua (véase el ejemplo 1), como también lo es la función $y = x$ (véase el ejemplo 2), razón por la cual la continuidad de $P(x)$ se desprende del teorema 1.

EJEMPLO 5. La función $y = \cos x$ es continua. Es una composición de dos funciones continuas: $y = \operatorname{sen} u$, $u = \frac{\pi}{2} - x$.

EJEMPLO 6. La función

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

es continua para los x citados, porque (véase el teorema 1) es igual al cociente que se obtiene al dividir las funciones continuas, con la particularidad de que el divisor no es igual a cero (para los x indicados).

EJEMPLO 7. La función

$$y = \operatorname{sen}^3 x^5$$

es continua para x cualquiera, porque es una composición de las funciones continuas: $y = u^3$, $u = \operatorname{sen} v$, $v = x^5$ (véase el teorema 2).

EJEMPLO 8. La función $y = |x|$ es continua $\forall x$, porque

$$|\Delta y| = ||x + \Delta x| - |x|| \leqslant |x + \Delta x - x| = |\Delta x| \to 0$$
$$\text{para} \quad \Delta x \to 0.$$

EJEMPLO 9. Si una función $f(x)$ es continua en el punto x_0, también será continua en este punto la función $|f(x)|$.

Esto se desprende del teorema 2 y del ejemplo 8, porque la función $|f(x)|$ es una composición de dos funciones continuas: $y = |u|$, $u = f(x)$.

He aquí dos teoremas más que provienen directamente de los teoremas correspondientes 1 y 2 del § 3.2 para el límite de una función.

TEOREMA 3. *Si una función f es continua en el punto a, existe un entorno $U(a)$ de este punto, en el cual f está acotada.*

TEOREMA 4. *Si una función f es continua en el punto a y $f(a) \neq 0$, entonces existe un entorno $U(a)$ del punto a, en el cual*

$$|f(x)| > |f(a)|/2.$$

Más aún, si $f(a) > 0$, se tiene

$$f(a)/2 < f(x) \quad (x \in U(a)),$$

y si $f(a) < 0$, entonces

$$f(x) < f(a)/2 \quad (x \in U(a)).$$

§ 3.4. Discontinuidades de primera y segunda especies

Por definición, la función f *es continua en el punto* $x = a$ *por la derecha (por la izquierda), si*

$$f(a) = f(a+0) \quad (f(a) = f(a-0), \text{ respectivamente})$$

(véase el fin del § 3.2).

La continuidad de f en el punto a puede definirse también del modo siguiente: *la función f es continua en el punto $x = a$, si está definida en cierto entorno de este punto, incluso en el propio punto $x = a$, y si existen los límites $f(a+0)$ y $f(a-0)$* tales que

$$f(a) = f(a+0) = f(a-0). \tag{1}$$

Si la función f es de tal género que para ella existen los límites $f(a+0)$, $f(a-0)$ sin que se cumplan las igualdades (1), entonces, evidentemente, será *discontinua* (no continua) en el punto a. En este caso suele decirse que la función f tiene en el punto a una *discontinuidad de primera especie.*

En las figs. 18—23 se dan seis gráficas de las funciones que tienen en el punto a discontinuidades de primera especie. La letra A denota el punto $A = (a, f(a))$ de la gráfica de las funciones. La flecha en un extremo del trozo de la curva significa que el punto terminal, en el que se ubica la flecha, está extraído.

En las figs. 18—21 se exponen las gráficas de las funciones, para las cuales todos los tres números $f(a)$, $f(a+0)$, $f(a-0)$ tienen sentido. En la fig. 18 tres números $f(a)$, $f(a+0)$, $f(a-0)$ son distintos dos a dos: la función no es sólo discontinua en a, sino que también lo es por la derecha y por la izquierda. En la fig. 19 la función es continua en a por la izquierda, pero discontinua por la derecha. En la fig. 21 se ve que $f(a+0) = f(a-0) \neq f(a)$. En este caso dicen que la función f tiene en el punto a una *discontinuidad evitable*, pues se puede modificarla en el punto a, al poner $f(a) = f(a+0) = f(a-0)$, y la función se hará continua en este punto. En la fig. 22 la función no está definida en el punto a. En la fig. 23 la función tampoco está definida en el punto a, pero $f(a+0) = f(a-0)$, por lo cual, si definimos f en el punto a adicionalmente, al poner $f(a) = f(a+0) = f(a-0)$, entonces la función f se hará continua en el punto a.

En los casos que se muestran en las figs. 22 y 23 la función f está definida en un entorno del punto, a excepción del mismo punto a. En tales casos se dice a menudo que la función f es discontinua en el punto a, aunque la idea de continuidad y discontinuidad en el punto a es la de cotejar $f(a)$ con $f(x)$ para x ubicados en las cercanías de a.

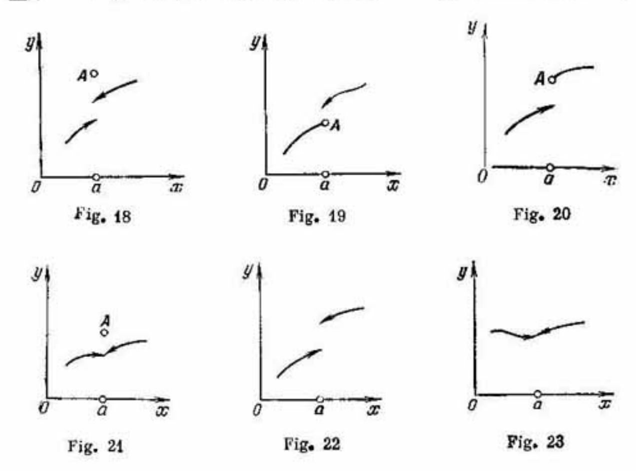


Fig. 18 Fig. 19 Fig. 20

Fig. 21 Fig. 22 Fig. 23

Si la función f está privada del límite derecho o del límite izquierdo en el punto a, o si no existe ni el límite derecho ni el izquierdo, o bien ambos límites citados son infinitos, suele decirse que la función tiene una *discontinuidad de segunda especie en dicho punto.*

EJEMPLO 1. La función

$$f(x)=\begin{cases} \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

está privada en el punto $x = 0$ del límite derecho, al igual que del izquierdo (véase el ejemplo 3 del § 3.2). Por consiguiente, tiene discontinuidad de segunda especie en el punto $x = 0$.

EJEMPLO 2. La función

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

es, evidentemente, continua para $x \neq 0$, y en el punto $x = 0$ tiene una discontinuidad de primera especie. En este caso $\operatorname{sign}(0+0) = 1$, $\operatorname{sign}(0-0) = -1$.

EJEMPLO 3. La función $[x]$ —la parte entera de x— tiene, para $x \geqslant 0$, la gráfica expuesta en la fig. 24. Es continua para los x no

enteros, y si x es entero, entonces $[x+0] = x = [x]$ y $[x-0] = x - 1$, y, por consiguiente, la función tiene discontinuidad de primera especie.

EJEMPLO 4. La función

$$y = \begin{cases} 1/x, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0, \end{cases}$$

es continua para $x \neq 0$. Los límites derecho e izquierdo en el punto $x = 0$ son iguales al infinito, por lo cual en este punto la función tiene discontinuidad de segunda especie. En tal caso se dice también que la función tiene *discontinuidad infinita en* dicho *punto*.

Fig. 24

TEOREMA 1. *Si la función f no decrece en el segmento $[a, b]$, existen los límites $f(a+0) \geqslant f(a)$ y $f(b-0) \leqslant f(b)$.*

Demostración. De la hipótesis se desprende que

$$f(x) \leqslant f(b), \quad \forall x \in [a, b),$$

es decir, f está acotada superiormente por el número $f(b)$ en el semiintervalo $[a, b)$. Pero, en este caso existe una cota superior exacta de f en dicho semiintervalo:

$$\sup_{x \in [a, b)} f(x) = M \leqslant f(b).$$

En virtud de la propiedad de la cota superior exacta, para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $x_0 \in [a, b)$ tal que

$$M - \varepsilon < f(x_0) \leqslant M, \tag{2}$$

y, debido a que f no decrece, tiene lugar

$$f(x_0) \leqslant f(x), \quad \forall x\colon\ x_0 < x < b. \tag{3}$$

De (2) y (3) proviene que

$$M - \varepsilon < f(x) \leqslant M, \quad \forall x\colon\ x_0 < x < b,$$

y hemos, pues, demostrado que existe el límite izquierdo de f en el punto b:

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = f(b-0) = M \leqslant f(b).$$

Análogamente, al examinar la desigualdad $f(a) \leqslant f(x)$ para $x \in (a, b]$, demostremos la existencia de

$$f(a+0) = \inf_{x \in (a, b]} f(x) \geqslant f(a).$$

COROLARIO. *Si la función f no decrece en el segmento $[a, b]$, entonces en cualquier punto $x \in [a, b)$ existe el límite derecho $f(x+0) \geqslant f(x)$ y en cualquier punto $x \in (a, b]$ existe el límite izquierdo $f(x-0) \leqslant f(x)$.*

Efectivamente, para los puntos $x = a$ b esta afirmación se ha demostrado en el teorema 1. Sea $x \in (a, b)$. En los segmentos $[a, x]$ y $[x, b]$ la función f no decrece, por lo cual, de acuerdo con el teorema 1, existen los límites $f(x-0)$, $f(x+0)$ y $f(x-0) \leqslant f(x) \leqslant f(x+0)$.

En el caso dado resulta obvio que para que la función f sea continua en el punto x, es necesario y suficiente que se cumpla la igualdad $f(x-0) = f(x+0)$.

Si $f(x-0) < f(x+0)$, la función f tiene en el punto x una discontinuidad de primera especie.

TEOREMA 2. *Un conjunto de puntos de discontinuidad de la funcion f, monótona en el segmento $[a, b]$ es a lo sumo numerable.*

Demostración. Supongamos que la función f tiene más de un punto de discontinuidad y sean x' y x'' $(x' < x'')$ dos puntos cualesquiera de ellos. Puesto que

$$f(x'+0) = \inf_{y \in (x', x'')} f(y),$$

$$f(x''-0) = \sup_{y \in (x', x'')} f(y),$$

se tiene

$$f(x'+0) \leqslant f(x''-0)$$

y los intervalos del eje y $(f(x'-0), f(x'+0))$, $(f(x''-0), f(x''+0))$ no se intersecan.

A todo punto de discontinuidad x' de la función f le corresponde el intervalo $f(x'-0), f(x'+0))$. Elijamos dentro de dicho intervalo un punto racional $\alpha_{x'}$. Teniendo presente lo dicho anteriormente, concluimos que a los diferentes puntos de discontinuidad x' les corresponden distintos puntos $\alpha_{x'}$. Mas, el conjunto de todos los números racionales es numerable. Por eso el conjunto de todos los puntos $\alpha_{x'}$, al igual que el conjunto de todos los puntos x' (puntos de discontinuidad de f), es a lo sumo numerable. El teorema queda demostrado.

§ 3.5. Funciones continuas en un segmento

Una función f se denomina *continua en el segmento* $[a, b]$, si es continua en todos los puntos del intervalo (a, b), es continua a la derecha en el punto a y es continua a la izquierda en el punto b.

Las funciones continuas en un segmento poseen toda una serie de propiedades notables las cuales vamos a exponer ahora mismo.

Al principio enunciemos los teoremas que expresan dichas propiedades, expliquémoslos con ayuda de las gráficas y los ejemplos y después demostrémoslos formalmente.

TEOREMA 1. *Si la función f es continua en el segmento $[a, b]$, está acotada en éste, es decir, existe una constante $K > 0$ tal que se verifica*

la desigualdad

$$|f(x)| \leqslant K, \quad \forall x \in [a, b].$$

En la fig. 25 viene expresada la gráfica Γ de una función continua f en el segmento $[a, b]$. Existe, evidentemente, un número $K > 0$ tal que Γ se encuentra más abajo que la recta $y = K$, pero por encima de la recta $y = -K$. En esto precisamente consiste el teorema 1.

Ha de notarse que si una función es continua en el intervalo (a, b) o bien en el semi-intervalo $[a, b)$ ó $(a, b]$, entonces no está forzosamente acotada en él. Por ejemplo, la función $1/x$ es continua en el semi-intervalo $(0, 1]$, pero no está acotada en este último.

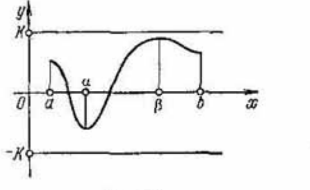


Fig. 25

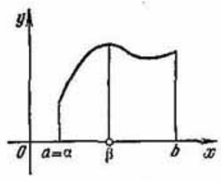


Fig. 26

Si definimos adicionalmente esta función, poniendo $f(0) = 0$, será *finita* en cualquier punto del segmento $[0, 1]$, quedando, sin embargo, no acotada en él.

TEOREMA 2 (DE WEIERSTRASS). *Si la función f es continua en $[a, b]$, tiene en el mismo su mínimo y su máximo, es decir, existen tales puntos $\alpha, \beta \in [a, b]$ que $f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta)$, cualquiera que se $x \in [a, b]$. En otras palabras,*

$$\min_{x \in [a, b]} f(x) = f(\alpha) \qquad \max_{x \in [a, b]} f(x) = f(\beta).$$

Una función continua $y = f(x)$, expuesta en la fig. 25, alcanza su mínimo sobre $[a, b]$ en el punto $x = \alpha$ y su máximo, en el punto $x = \beta$. En este caso ambos puntos α y β pertenecen al intervalo (a, b) $(\alpha, \beta \in (a, b))$. Una función continua $y = f(x)$ expuesta en la fig. 26 alcanza su mínimo en el segmento $[a, b]$, en su extremo izquierdo, y en cierto punto interior de este segmento alcanza su máximo.

Observación 1. Según el teorema 1, una función continua en el segmento $[a, b]$ está acotada en él. Por consiguiente, existen las cotas finitas superior e inferior exactas de f en este segmento:

$$\inf_{x \in [a, b]} f(x) \leqslant \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

El teorema 2 afirma que dichas cotas en $[a, b]$ se alcanzan, es decir, aquí inf y sup pueden sustituirse por mín y máx (mínimo y máximo), respectivamente.

Observación 2. La función $y = x$ es continua en el intervalo $(0, 1)$ y está acotada en éste; su cota superior $\sup\limits_{x \in (0, 1)} x = 1$ no se alcanza, o sea, no existe tal $x_0 \in (0, 1)$, para el cual esta función es igual a 1. De este modo, en el teorema 2 la condición de continuidad de f en un *segmento cerrado* (que contiene ambos extremos a y b del segmento) es esencial.

Es evidente que $\sup\limits_{x \geqslant 0} \operatorname{arctg} x = \pi/2$. No obstante, no hay tal x en el rayo $x \geqslant 0$, para el cual la función $\operatorname{arctg} x$ tome el valor $\pi/2$ y dicha función no alcanza su máximo en $x \geqslant 0$. En el caso dado las condiciones del teorema no se cumplen: el dominio de definición de la función continua $\operatorname{arctg} x$ no está acotada.

Si la función f es discontinua en $[a, b]$, no es obligatorio que ella alcance su cota superior exacta. Como ejemplo puede servir una función

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 1/2, \\ 0, & 1/2 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

TEOREMA 3. *Si la función f es continua en el segmento $[a, b]$, mientras que los números $f(a)$ y $f(b)$ son distintos de cero y tienen signos*

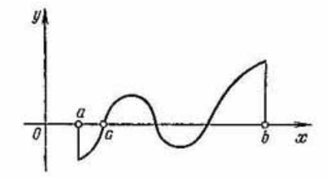


Fig. 27

ontrarios, entonces en el intervalo (a, b) hay por lo menos un punto c tal que $f(c) = 0$.

Una función cuya gráfica Γ está expuesta en la fig. 27 satisface las condiciones del teorema 3. Es continua en $[a, b]$ y $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Desde el punto de vista geométrico se ve que la gráfica de Γ debe cortar el eje x por lo menos en un punto $c \in (a, b)$. Esto precisamente afirma el teorema 3.

COROLARIO. *Si la función f es continua en $[a, b]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$ $(A \neq B)$ y C es un número arbitrario entre los números A y B, entonces en el intervalo (a, b) se encontrará por lo menos un punto c, para el cual $f(c) = C$.*

Este corolario puede enunciarse también del modo siguiente: *una función continua en el segmento* $[a, b]$ *toma todos los valores intermedios entre sus valores en los extremos del segmento* $[a, b]$.

Demostración. Definamos una función nueva $F(x) = f(x) - C$, donde C es una constante y representa un número que se encuentra entre A y B. Como f es continua en $[a, b]$, F será también una función continua en $[a, b]$. Es evidente, además, que F toma en los extremos del segmento $[a, b]$ los valores do signos opuestos. Entonces, de acuerdo con el teorema 3, debe existir en (a, b) tal punto c que $F(c) = 0$, o bien $f(c) - C = 0$, es decir, $f(c) = C$, lo que se trataba de demostrar.

EJEMPLO 1. La ecuación $x - \cos x = 0$ tiene una raíz en el intervalo $(0, \pi)$.

En efecto, la función $f(x) = x - \cos x$ es continua en el segmento $[0, \pi]$ y en los extremos de éste toma los valores de signos opuestos: $f(0) = -1$, $f(\pi) = \pi + 1$.

Más abajo vienen las demostraciones formales de los teoremas 1—3.

Demostración del teorema 1. Supongamos que f no está acotada en $[a, b]$. En este caso para todo número natural n existe un punto $x_n \in [a, b]$ tal que

$$|f(x_n)| > n \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

La sucesión $\{x_n\}$ está acotada (¡a y b son los números finitos!) y se puede seleccionar en ella una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ que converja a cierto número $\alpha \in [a, b]$ (véase el corolario del teorema 4 del § 2.1). Mas en el punto α la función f es continua (si $\alpha = a$ ($\alpha = b$), en dicho punto f es continua a la derecha (a la izquierda)), por lo cual

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\alpha). \tag{2}$$

La propiedad (2) contradice la propiedad (1). Por eso f puede ser sólo acotada en $[a, b]$.

Demostración del teorema 2. En virtud del teorema anterior, una función continua en $[a, b]$ está acotada, por consiguiente, está acotada superiormente por cierto número K:

$$f(x) \leqslant K \quad (x \in [a, b]).$$

Pero, en este caso existe una cota superior exacta de f en $[a, b]$:

$$\sup_{x\in[a, b]} f(x) = M. \tag{3}$$

El número M posee la propiedad siguiente: para cualquier número natural n existe en $[a, b]$ un punto x_n tal que

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leqslant M \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Por cuanto la sucesión $\{x_n\}$ pertenece a $[a, b]$, ella está acotada y por esta razón se puede formar en dicha sucesión una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ que converja a cierto número β, el cual pertenece, a ciencia cierta, a $[a, b]$. Mas, la función f es continua en el punto β, por lo cual

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\beta).$$

Por otra parte, $M - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leqslant M$ $(k = 1, 2, \ldots)$ y

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = M.$$

Teniendo presente que $f(x_{n_k})$ puede tender sólo hacia un límite, resulta que $M = f(\beta)$. De este modo, la cota superior (3) se alcanza en el punto β, es decir, como suele decirse, *la función f alcanza en el punto β su máximo sobre el segmento $[a, b]$*. Hemos demostrado que existe un punto $\beta \in [a, b]$, para el cual

$$\max_{x\in[a, b]} f(x) = f(\beta).$$

La demostración de la otra parte del teorema referente al mínimo es análoga, pero puede ser reducida a la demostración de la primera parte del teorema tomando en consideración que

$$\min_{x\in[a, b]} f(x) = -\max_{x\in[a, b]} \{-f(x)\}.$$

Demostración del teorema 3. Designemos por σ_0 el segmento $[a, b]$. Dividamos σ_0 en dos partes iguales. Si en el centro de σ_0 la función es nula, el teorema quedará demostrado. Si no, una de las mitades de σ_0 es tal que en sus extremos nuestra función toma los valores de signos opuestos. Designaremos precisamente esta mitad mediante σ_1 y dividirémosla en dos partes iguales. Puede suceder que en el centro de σ_1 nuestra función sea nula y en este caso el teorema quedará demostrado. Si no, designaremos mediante σ_2 aquella de las mitades en cuyos extremos la función f toma los valores de signos opuestos. Razonando así por inducción, o bien tropezaremos, en alguna etapa de razonamientos, con un punto $c \in (a, b)$, para el cual $f(x) = 0$, y el teorema quedará demostrado, o bien obtendremos una sucesión (infinita) de segmentos encajados uno en otro $\sigma_0 \supset \sigma_1 \supset \supset \sigma_2 \supset \ldots$, en cada uno de los cuales f tiene valores de signos opuestos. Por consiguiente, existe un punto c, perteneciente a todos los σ_n, y, desde luego, a $[a, b]$. Es evidente que $f(c) = 0$, porque si admitimos, por ejemplo, que $f(c) > 0$, se encontraría tal entorno $U(c)$ del punto c que para todos los x de $[a, b]$, pertenecientes a $U(c)$, la función $f(c)$ sería positiva, lo que es imposible, dado que, siendo n suficientemente grande, el segmento $\sigma_n \subset U(c)$, y f no conserva su signo en σ_n. El teorema está demostrado.

§ 3.6. Función inversa continua

Analicemos una función continua $y = f(x)$ que es estrictamente creciente en el segmento $[a, b]$ (fig. 28). Sea

$$f(a) = \alpha, \quad f(b) = \beta.$$

La gráfica de esta función es una curva continua. La gráfica muestra que si x crece continuamente desde a hasta b, entonces y crece también continuamente de α a β, recorriendo una sola vez todos los valores en el segmento $[\alpha, \beta]$. Pero, en este caso, a todo valor de $y \in [\alpha, \beta]$ le corresponde un único valor de $x \in [a, b]$ tal que $y = f(x)$. Con esto queda definida en el segmento $[\alpha, \beta]$ una función

$$x = g(y), \quad y \in [\alpha, \beta],$$

llamada *inversa* de la función $y = f(x)$.

Fig. 28

Es evidente que la función $x = g(y)$ es estrictamente creciente en el segmento $[\alpha, \beta]$ y aplica dicho segmento sobre $[a, b]$; se cumplen las identidades

$$f[g(y)] = y, \quad \forall y \in [\alpha, \beta],$$
$$g[f(x)] = x, \quad \forall x \in [a, b].$$

La gráfica de la función $x = g(y)$ puede obtenerse girando al ángulo de 180° el plano en consideración alrededor de la bisectriz del primer ángulo coordenado del sistema x, y. Como resultado de rotación, la gráfica queda continua y esto es indicio de que la función $x = g(y)$ es continua en $[\alpha, \beta]$

De este modo, haciendo uso de los razonamientos geométricos, hemos establecido la validez del teorema siguiente.

TEOREMA 1. *Supongamos que la función f es continua en el segmento $[a, b]$, crece estrictamente en dicho segmento y, además, $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$.*

En este caso: 1) *la imagen del segmento $[a, b]$ creada con ayuda de f es el segmento $[\alpha, \beta]$,* 2) *existe una función $x = g(y)$, inversa de f, que es uniforme, estrictamente creciente y continua en $[\alpha, \beta]$.*

La demostración formal del teorema 1 se basa en el siguiente lema.

LEMA 1. *Supongamos que una función estrictamente creciente $y = f(x)$ aplica el segmento $[a, b]$ sobre el segmento $[\alpha, \beta]$, es decir, $f([a, b]) = [\alpha, \beta]$. Entonces, f es continua en $[a, b]$.*

Demostración. Prefijemos un punto arbitrario x_0, perteneciente por el momento al intervalo (a, b) $(a < x_0 < b)$. Debido a que f

es estrictamente creciente, el punto correspondiente $y_0 = f(x_0)$ pertenecerá al intervalo (α, β) $(\alpha < y_0 < \beta)$.

Elijamos $\varepsilon > 0$ tan pequeño que $\alpha < y_0 - \varepsilon < y_0 < y_0 + \varepsilon < \beta$. Por condición, existen tales puntos $x_1, x_2 \in (a, b)$ $(x_1 < x_0 < x_2)$ que $y_0 - \varepsilon = f(x_1)$, $y_0 + \varepsilon = f(x_2)$.

El intervalo (x_1, x_2) puede considerarse como un entorno del punto x_0 $(x_0 \in (x_1, x_2))$.

A consecuencia de que f es creciente, para $x \in (x_1, x_2)$ tendremos $y_0 - \varepsilon < f(x) < y_0 + \varepsilon$, o bien $|f(x) - y_0| < \varepsilon$, o sea,

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

con lo que queda demostrada la continuidad de la función f en el punto x_0.

Si $x_0 = a$, o si $x_0 = b$, se demuestra por analogía la continuidad unilateral de la función f.

Demostración del teorema 1. Supongamos que $Y = f([a, b])$ es la imagen de $[a, b]$ creada con ayuda de f. Por cuanto $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$ y f crece, entonces $\alpha \leqslant f(x) \leqslant \beta$, $\forall x \in [a, b]$, de donde se deduce que

$$Y \subset [\alpha, \beta]. \tag{1}$$

Por otra parte, si y es un punto arbitrario del segmento $[\alpha, \beta]$, pertenece a Y en virtud del teorema 3, § 3.5, sobre el valor intermedio de una función continua, es decir,

$$[\alpha, \beta] \subset Y. \tag{2}$$

De (1) y (2) proviene la afirmación 1):

$$Y = [\alpha, \beta].$$

Ahora, la afirmación 2) proviene del lema 1. En efecto, dado que f es estrictamente creciente, existe en $Y = [\alpha, \beta]$ una función inversa estrictamente creciente $g(y)$ que aplica el segmento $[\alpha, \beta]$ sobre el segmento $[a, b]$. Pero en este caso, de acuerdo con el lema 1, la función $g(y)$ es continua. El teorema está demostrado.

Introduciendo cambios insignificantes en los razonamientos aducidos, se puede demostrar el siguiente análogo del teorema 1.

TEOREMA 1. *Supongamos que f es una función continua y estrictamente crece en (a, b) (o en $[a, b)$, o bien en $(a, b]$) y*

$$\alpha = \inf_{x \in (a, b)} f(x), \quad \beta = \sup_{x \in (a, b)} f(x).$$

Entonces, la imagen del intervalo (a, b) ($[a, b)$, $(a, b]$, respectivamente) será el intervalo (α, β) ($[\alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta]$, respectivamente) y la función $x = g(y)$, inversa de f, será uniforme, crece estrictamente, y continua en (α, β) ($[\alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta]$).

Observación. Una función $f(x)$, continua y estrictamente decreciente en $[a, b]$ (en (a, b)) tiene su inversa también continua y estricta-

mente decreciente en $[\beta, \alpha]$, donde $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$. Lo dicho se establece con facilidad, si analizamos la función $-f(x)$ o la función $f(-x)$.

En cambio, si una función $y = f(x)$, continua en $[a, b]$ no es estrictamente monótona en dicho segmento, se puede definir para ella una función inversa, pero ésta última ya será *multiforme*, por lo menos para ciertos y.

EJEMPLO. Una función

$$y = \text{sen}\, x, \quad x \in (-\infty, \infty),$$

es continua, pero no monótona. El conjunto de sus valores y llena el segmento $[-1, 1]$. A todo y de este segmento le corresponde un número infinito de valores de x, para los cuales $y = \text{sen}\, x$.

No obstante, por ejemplo, en el segmento $[-\pi/2, \pi/2]$ la función $y = \text{sen}\, x$ es continua y crece estrictamente tiene, una función inversa continua, la cual, como se sabe, se designa así:

$$x = \text{arcsen}\, y \quad (-1 \leqslant y \leqslant 1).$$

§ 3.7. Continuidad uniforme de una función

Supongamos que la función f es continua en el segmento $[a, b]$ (o en un intervalo, un semiintervalo). Entonces, para cada punto x_0 de este segmento (intervalo, semiintervalo) se encontrará, según un $\varepsilon > 0$ prefijado, tal $\delta > 0$, que

$$| f(x) = f(x_0) | < \varepsilon,$$

siempre que

$$| x - x_0 | < \delta, \quad x \in [a, b]$$

$$(\text{ó} \quad (a, b), \quad [a, b), \quad (a, b]).$$

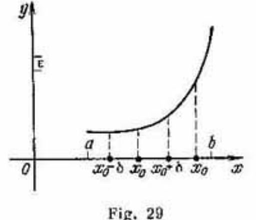


Fig. 29

Siendo ε constante, al cambiar x_0 el número δ varía, en el caso general, pues depende no sólo de ε, sino también de x_0. Según se ve en la fig. 29, el número δ, válido para la gráfica de pendiente suave, puede resultar demasiado grande para otro trozo, de la gráfica que va hacia arriba bruscamente. Al tomar en consideración tal circunstancia, resulta natural elegir aquellas funciones continuas, para las cuales puede indicarse, con dado $\varepsilon > 0$, un número $\delta > 0$ que sea apto para todos x pertenecientes al conjunto, donde viene dada la función.

Empecemos con la definición.

DEFINICION 1. *La función f, definida en un conjunto X, se dice uniformemente continua en dicho conjunto, si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe tal* $\delta > 0$, *dependiente sólo de* ε, que

$$| f(x') - f(x'')) | < \varepsilon$$

para cualesquiera $x', x'' \in X$ *que satisfacen la desigualdad* $| x' - x'' | < \delta$.

Es fácil ver que si una función es uniformemente continua en el conjunto X, con mayor razón será uniformemente continua en cualquiera de sus subconjuntos X' $(X' \subset X)$. Lo recíproco no es cierto en el caso general.

TEOREMA 1. *Si una función f está definida y es continua en el segmento* $[a, b]$, *será en dicho segmento uniformemente continua.*

Demostración. Supongamos que la afirmación del teorema no es cierta. Entonces existe tal $\varepsilon > 0$ que para cualquier $\delta > 0$ hay un par de puntos $x', x'' \in [a, b]$ que satisfacen la desigualdad $| x' - x'' | < \delta$, para los cuales

$$| f(x') - f(x'') | \geqslant \varepsilon.$$

Elijamos una sucesión de números positivos δ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ que tiende a cero. Para todo δ_n existen unos puntos $x'_n, x''_n \in [a, b]$ tales que

$$| x'_n - x''_n | < \delta_n, \quad \text{pero} \quad | f(x'_n) - f(x''_n) | \geqslant \varepsilon. \tag{1}$$

Puesto que los puntos de la sucesión $\{x'_n\}$ pertenecen a $[a, b]$, esta sucesión está acotada y, según el teorema de Bolzano—Weierstrass, de esta se puede formar una sucesión contenida $\{x_{n_k}\}$ que converja hacia cierto punto $x_0 \in [a, b]$. Por cuanto $x'_{n_k} - x''_{n_k} \to 0$, $k \to \infty$, la sucesión, contenida $\{x_{n_k}\}$ también converge hacia el punto x_0. Por condición, la función f es continua en $[a, b]$ y, consecuentemente, es continua en el punto x_0. Desde luego, si $x_0 = a$ o si $x_0 = b$, se debe considerar que f es continua en x_0 por la derecha o por la izquierda, respectivamente. Por esta razón

$$\lim_{k \to \infty} f(x'_{n_k}) = \lim_{k \to \infty} f(x''_{n_k}) = f(x_0).$$

Después de pasar al límite en (1), para $k \to \infty$ obtendremos

$$\varepsilon \leqslant \lim_{k \to \infty} | f(x'_{n_k} - f(x''_{n_k}) | = f(x_0) - f(x_0) | = 0, \tag{2}$$

y hemos llegado a una contradicción: $\varepsilon \leqslant 0$.

Notemos que en (2) se ha aprovechado la continuidad de la función $| u |$ (véase el § 3.3, ejemplo 8). El teorema queda demostrado.

EJEMPLO 1. La función

$$y = \text{sen}\,(1/x)$$

es continua en el segmento $[\delta, 1]$, $\forall\delta > 0$, razón por la cual, en virtud del teorema 1, es uniformemente continua en este segmento.

Por otra parte, en el semiintervalo $(0, 1]$ dicha función, aunque es continua, no es uniformemente continua. Esto es indicio de que en el teorema 1 la exigencia de que la función continua sea dada en un segmento y no en un intervalo, es esencial.

Cerciorémonos de que nuestra función no es uniformemente continua en $(0, 1]$. Los puntos $x_k = \frac{2}{\pi(2k+1)}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ pertenecen, evidentemente, al semiintervalo $(0, 1]$, y para ellos

$$|f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \left|\operatorname{sen}\frac{\pi(2k+3)}{2} - \operatorname{sen}\frac{\pi(2k+1)}{2}\right|$$
$$= |(-1)^{k+1} - (-1)^k = 2.$$

Al prefijar $\varepsilon = 1$, se encontrará, para cualquier $\delta > 0$, tal k que

$$|x_{k+1} - x_k| = \frac{4}{\pi(2k+3)(2k+1)} < \delta,$$

mientras que

$$|f(x_{k+1}) - f(x_k)| = 2 > \varepsilon = 1.$$

De lo dicho se deduce que nuestra función no puede ser extendida al segmento $[0, 1]$, definiéndola adicionalmente en el punto $x = 0$ de modo tal que ella sea continua en $[0, 1]$, porque en tal caso sería, de acuerdo con el teorema 1, uniformemente continua en $[0, 1]$ y, por consiguiente, también en $(0, 1]$, lo que no puede tener lugar.

§ 3.8. Funciones elementales

Las funciones C (una constante), x^n, a^x, $\log_a x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{Arcsen} x$, $\operatorname{Arccos} x$, $\operatorname{Arctg} x$ se llamarán *funciones elementales más simples*.

Al aplicar a estas funciones las operaciones aritméticas o las operaciones de una función de función (superposiciones) en un número finito, obtendremos las nuevas funciones más complejas que se denominan *funciones elementales*.

Por ejemplo, $y = \ln(e^x + \operatorname{sen}^2 x + 1)$ es una función elemental.

Las funciones elementales se conocen por el curso de las matemáticas escolar. En aquel curso se prestaba gran atención a las propiedades de dichas funciones sin definirlas de modo estricto tomando en consideración la confianza en la intuición del alumno.

Nos será provechoso prestar atención a estas cuestiones desde el punto de vista de los hechos generales del análisis matemático los cuales ahora ya sabemos.

a) Función constante C. A cada número (punto) real x dicha función pone en correspondencia un mismo número C. La gráfica de

la función representa una recta, paralela al eje x, que dista de este eje a una magnitud $|C|$ y pasa por encima de él, si $C > 0$, y por debajo, si $C < 0$. Es una función continua en todo el eje real (véase el § 3.3, ejemplo 1).

b) Función potencial x^n (n es una constante). Cuando $n \in \mathbf{N}$ es natural, dicha función está definida en todo el eje real. Para calcularla (¡teóricamente!) desarrollemos x en una fracción decimal ($x = \pm\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \ldots$) y multipliquemos esta fracción por sí misma n veces, aplicando cada vez la regla de multiplicación de las fracciones decimales (véase el § 1.6 (11) y la regla de signos.)

La función x^n es continua, porque representa un producto de funciones continuas ($y = x$) tomadas en un número finito. Ella crece estrictamente en $[0, \infty)$ lo que se ve de las relaciones

$$x_2^n - x_1^n = (x_2 - x_1)(x_2^{n-1} + x_2^{n-2}x_1 + \ldots + x_1^{n-1}) > 0$$

para $x_1 < x_2$. Además, esta función tiende hacia $+\infty$, cuando $x \to +\infty$. En efecto, si $x \geqslant 1$, se tiene $x^n = x^{n-1}x \geqslant x$ $(n > 1)$ y, para $x \to \infty$, $x^n \to \infty$.

Así pues, la función $\varphi(x) = x^n$ (para n natural) es continua, crece estrictamente en $[0, \infty)$ y para ella $\varphi(0) = 0$, $\sup\limits_{x \in [0, \infty)} \varphi(x) = +\infty$. Pero, en virtud del teorema 1', § 3.6, la función $y = x^n$ aplica el semiintervalo $X = [0, \infty)$ sobre el semiintervalo $Y = [0, \infty)$ y existe una función, inversa de y, uniforme continua y estrictamente creciente. Esta última función se designa así:

$$x = y^{1/n} = \sqrt[n]{y} \quad (y \geqslant 0)$$

y se llama *valor aritmético de la raíz de n-ésimo grado de y*.

Observemos que cuando $y > 1$ $(n \geqslant 1)$, se tiene

$$\sqrt[n]{y} > \sqrt[n]{1} = 1. \tag{1}$$

Subrayemos que *si a es un número arbitrario no negativo* ($0 \leqslant a < \infty$), *entonces existe para él (en vista de lo dicho) un número no negativo (y, además, único) $b = a^{1/n}$ (valor aritmético de la raíz de n-ésimo grado de a) tal que $b^n = a$.*

Hemos pues demostrado la existencia de la raíz de n-ésimo grado de a ($a \geqslant 0$).

Esta afirmación nos faltaba en el curso de las matemáticas escolar, en el que se introducía la noción de una raíz de n-ésimo grado de a ($a \geqslant 0$) y se estudiaban las propiedades de las raíces de n-ésimo grado, pero no se demostraba que tales raíces existían: la existencia de ellas se suponía de por sí.

Observemos que si $n = 2k + 1$ es un número impar ($k = 0, 1, 2, \ldots$) la función $y = x^n$ será impar ($(-x)^n = -x^n$). Es continua, crece,

evidentemente, de modo estricto en $(-\infty, \infty)$ y posee las propiedades

$$\inf_{x\in(-\infty,\infty)} x^n = -\infty, \quad \sup_{x\in(-\infty,\infty)} x^n = +\infty.$$

Por ello, en virtud del teorema 1', § 3.6, la función $y = x^{2k+1}$ aplica $(-\infty, \infty)$ sobre $(-\infty, \infty)$ y tiene en $(-\infty, \infty)$ su inversa

$$x = \sqrt[n]{y}, \quad y \in (-\infty, \infty), \quad n = 2k + 1,$$

que es continua y estrictamente creciente.
La expresión $\sqrt[n]{y}$ para $y > 0$ se entiende como valor aritmético de la raíz de n-ésimo grado de y, es decir, como un número positivo

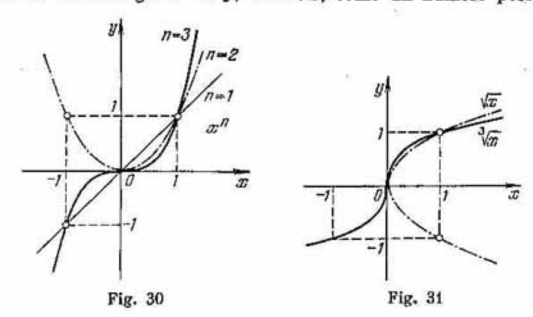


Fig. 30 Fig. 31

cuya n-ésima potencia es y. Si, en cambio, $y < 0$, entonces

$$\sqrt[n]{y} = -\sqrt[n]{|y|},$$

donde en el segundo miembro la raíz se entiende en el sentido del valor aritmético.

Para $n = 2k$ par ($k = 1, 2, \ldots$) $y = x^n$ es una función continua par. Ella aplica el intervalo $(-\infty, +\infty)$ sobre el semiintervalo $[0, \infty)$. Pero no es monótona en $(-\infty, +\infty)$ y su función inversa es biforme:

$$x = \pm\sqrt[n]{y} \quad (y \geqslant 0).$$

El valor $y = 0$ es único, para el cual la función es uniforme.

En las figs. 30 y 31 vienen expresadas las gráficas de ciertas funciones x^n, $x^{1/n}$.

En el curso de las matemáticas escolar la función x^n se define también para n racionales. Sea $p, q \in N$. Se supone para $x \geqslant 0$

$$x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$$

7—01380

y se demuestra que

$$x^{p/q} = x^{sp/sq} = (\sqrt[q]{x})^p \ (x \geqslant 0).$$

Se supone también

$$x^{-p/q} = \frac{1}{\sqrt[q]{x^p}} \ (x > 0)$$

y, además,

$$x^0 = 1.$$

Para cualquier n racional se demuestra la propiedad propia para una función potencial:

$$(xy)^n = x^n y^n \quad (x,\ y > 0).$$

Observemos que la función $y = x^{p/q}$ ($p,\ q \in \mathrm{N}$) es continua, crece de modo estricto en el semiintervalo $[0,\ \infty)$ y aplica $[0,\ \infty)$ sobre $[0,\ \infty)$ (todas estas propiedades se establecen sin dificultades algunas), razón por la cual tiene función inversa continua y estrictamente creciente, definida, evidentemente, por la igualdad

$$x = y^{-q/p}, \quad 0 \leqslant y < \infty$$

En lo que se refiere a la función $y = x^{-p/q}$ ($p,\ q \in \mathrm{N}$), podemos decir que decrece estrictamente, es continua en el intervalo $(0,\ \infty)$ y aplica $(0,\ \infty)$ sobre $(0,\ \infty)$. Por esta razón tiene en $(0,\ \infty)$ su función inversa, continua y estrictamente decreciente, que se define mediante la igualdad

$$x = y^{-q/p} \quad (y > 0).$$

Es evidente que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{-p/q} = +\infty, \quad \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} y^{-q/p} = +\infty.$$

Cualquier función potencial x^n puede ser definida (para $x > 0$, y también para $x = 0$, siempre que $n \geqslant 0$), además, para n irracionales, pero es mejor hacerlo con ayuda de la función exponencial a^x (véase c) más abajo).

Notemos que en los razonamientos aducidos nos han sido de interés sólo las raíces reales de la ecuación $y = x^n$. Pero, si buscáramos las raíces complejas, se encontrarían n raíces distintas para cada $y \neq 0$ (véase más abajo el § 5.3).

EJEMPLO 1. Probemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1. \tag{2}$$

Efectivamente, en virtud de la fórmula para el binomio de Newton, para $\lambda > 0$ tenemos

$$(1+\lambda)^n = 1 + n\lambda + \frac{n(n-1)}{2!}\lambda^2 + \ldots > 1 + \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2.$$

Si en esta desigualdad ponemos $\lambda = \sqrt[n]{n} - 1$ (> 0 cuando $n \geqslant 2$, véase (1)), obtendremos

$$n > 1 + \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2$$

o bien

$$\frac{2}{n} > (\sqrt[n]{n} - 1)^2 > 0 \quad (n \geqslant 2).$$

Al extraer la raíz cuadrada (¡en el sentido del valor aritmético!), obtendremos, por ser la función $\sqrt{x}$ estrictamente monótona:

$$\sqrt{2/n} > \sqrt[n]{n} - 1 > 0$$

o bien

$$\sqrt{2/n} + 1 > \sqrt[n]{n} > 1 \quad (n \geqslant 2). \tag{3}$$

Por fin, aprovechando la continuidad de la función $\sqrt{x}$ en el punto $x = 0$, realizado el paso al límite para $n \to \infty$, de (3) obtendremos la igualdad (2) (véase el teorema 5, § 2.1).

c) Función exponencial a^x ($a > 0$, $a \neq 1$). En lo sucesivo los números racionales se designarán mediante las letras griegas α, β, γ, ... Sea, por ahora, $a > 1$.

Por el curso de las matemáticas escolar sabemos qué es a^x para x racional (véase, además, b)).

Sabemos, también por el mismo curso, que:

1_1) $a^\alpha > 0$,

2_1) $a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}$,

3_1) $a^\alpha < a^\beta$ ($\alpha < \beta$, $a > 1$),

4_1) $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$.

Agreguemos además

5_1) $a^{\alpha_n} \to +\infty$, $\alpha_n \to +\infty$, $a > 1$.

Demostremos ahora mismo la propiedad 5_1). Escribamos a en la forma siguiente: $a = 1 + \lambda$ (¡$\lambda > 0$!). En este caso

$$a^n = (1+\lambda)^n = 1 + n\lambda + \ldots > 1 + n\lambda.$$

El segundo miembro de esta igualdad tiende al infinito cuando $n \to \infty$, por consiguiente, tiende también al infinito el miembro primero. Luego, considerando que $[\alpha_n]$ es la parte entera de α_n, tendremos

$$a^{\alpha_n} \geqslant a^{[\alpha_n]},$$

y si $\alpha_n \to +\infty$, entonces $[\alpha_n] \to +\infty$, por consiguiente, $a^{[\alpha_n]} \to +\infty$. Pero, en este caso $a^{\alpha_n} \to +\infty$.

Sea x un número racional arbitrario. Demostremos que *el número a^x puede definirse como una cota superior exacta*

$$\sup_{\alpha < x} a^\alpha = a^x \tag{4}$$

de los números a^α, extendida a todos los números racionales $\alpha < x$.

En efecto, a base de 3_1),

$$a^\alpha < a^x, \quad \forall \alpha < x, \tag{5}$$

es decir, se cumple la primera propiedad de la cota superior exacta. Por otro lado, formemos una sucesión estrictamente creciente de números racionales α_n que tiende hacia x ($\alpha_n \to x$). Para dicha sucesión $a^{\alpha_n} \to a^x$, $n \to \infty$. Esta propiedad se demuestra más abajo (véase (8)). Por ello, para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede encontrar tal n que sea

$$a^x - \varepsilon < a^{\alpha_n} < a^x, \tag{6}$$

es decir, queda cumplida la segunda propiedad de la cota superior exacta. De (5) y (6) se deduce (4).

Sea ahora x un número arbitrario irracional y sea m un número natural superior a x ($m > x$). Se verifica, evidentemente, la desigualdad

$$\underset{\alpha < x}{a^\alpha} < a^m$$

es decir, el conjunto de números a^α, extendido a los números racionales $\alpha < x$, está acotado. Pero, en este caso existe una cota superior exacta de dicho conjunto

$$\sup_{\alpha < x} a^\alpha.$$

Es un número bien determinado el cual se designará mediante a^x:

$$a^x = \sup_{\alpha < x} a^\alpha. \tag{7}$$

Con esto queda definida la función a^x para todos los x reales ($x \in (-\infty, \infty)$). Esta función se llama *exponencial.*

Así pues, *la función a^x* se define como una cota superior exacta de los números a^α, *extendida a todos los números racionales $\alpha < x$.*

Si x es racional, dicha definición coincide con la antigua (da un mismo número), en cambio, si los x son irracionales, da los números nuevos a^x.

Se puede demostrar que la función a^x, definida con ayuda de la igualdad (7), posee las siguientes propiedades importantes:

1) $a^x > 0$,

2) $a^x a^y = a^{x+y}$,

3) $a^x < a^y$ $(x < y,\ a > 1)$,
4) $a^x \to 1,\ x \to 0$,
5) $a^x \to \infty,\ x \to \infty$ $(a > 1)$,
6) $a^x \to 0,\ x \to -\infty$ $(a > 1)$,
7) $a^{xy} = (a^x)^y$.

Observemos que de las propiedades 2) y 4) se desprende la continuidad de la función a^x para todo valor de $x_0 \in (-\infty, \infty)$:

$$|a^x - a^{x_0}| = |a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1)| = a^{x_0}\,|a^{x-x_0} - 1| \to 0 \quad (8)$$

cuando $x - x_0 \to 0$.

En lo que sigue vamos a considerar que $a > 1$.

Demostración de 1). Para cualquier x existe $\alpha_0 < x$, por lo tanto

$$0 < a^{\alpha_0} < \sup_{\alpha<x} a^\alpha = a^x, \text{ es decir, } 0 < a^x.$$

Demostracion de 2). Sea $\alpha < x$ y $\beta < y$, entonces $\alpha + \beta < x + y$. Por otra parte, sea γ un número racional arbitrario que satisface la desigualdad

$$\gamma < x + y. \quad (9)$$

Probemos que γ puede escribirse en la forma

$$\gamma = \alpha + \beta, \text{ donde } \alpha < x,\ \beta < y. \quad (10)$$

De (9) se deduce que

$$\gamma - y < x.$$

Elijamos un α racional, para el cual

$$\gamma - y < \alpha < x, \quad (11)$$

y pongamos

$$\beta = \gamma - \alpha. \quad (12)$$

Entonces, de la primera desigualdad (11) se infiere que

$$\beta < y. \quad (13)$$

De este modo, el conjunto de todas las sumas $\alpha + \beta$, donde $\alpha < x$, $\beta < y$, es igual al conjunto de todos los $\gamma < x + y$:

$$\{\alpha+\beta\}_{\substack{\alpha<x\\ \beta<y}} = \{\gamma\}_{\gamma<x+y}.$$

Por eso

$$a^{x+y} = \sup_{\gamma<x+y} a^\gamma = \sup_{\substack{\alpha<x\\ \beta<y}} a^{\alpha+\beta} = \sup_{\substack{\alpha<x\\ \beta<y}} (a^\alpha a^\beta) =$$

$$= \sup_{\alpha<x} a^\alpha \sup_{\beta<y} a^\beta = a^x \cdot a^y$$

(véase el § 2.8, problema 2).

Demostración de 3). Supongamos que $x < y$ y β_1, β_2 son ciertos números racionales, para los cuales $x < \beta_1 < \beta_2 < y$. En este caso

$$a^x = \sup_{\alpha<x} a^\alpha \leqslant \sup_{\alpha<\beta_1} a^\alpha = a^{\beta_1} < a^{\beta_2} \leqslant \sup_{\beta<y} a^\beta = a^y,$$

y hemos demostrado que

$$a^x < a^y.$$

Demostración de 4). Para un número natural $n > a$ $(a > 1)$ se tiene

$$1 < a^{1/n} < n^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

(véase el ejemplo 1, p. b)) y hemos pues demostrado ahora que

$$\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = 1. \tag{14}$$

Prefijemos ahora una sucesión arbitraria de números positivos $x_n < 1$, que tienda a cero $(x_n \to 0, x_n > 0)$. Sea $k_n = [1/x_n]$ la parte entera de $1/x_n$. Entonces, $0 < x_n < 1/k_n$ y

$$1 = a^0 < a^{x_n} \leqslant a^{1/k_n}.$$

Por eso, en virtud de (14),

$$\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = 1.$$

Por ser $\{x_n\}$, donde $x_n > 0$, arbitraria, queda demostrado que existe un límite derecho

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} a^x = 1, \tag{15}$$

pero, en este caso existe también el límite izquierdo

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} a^x = \lim_{\substack{-x\to 0\\ -x>0}} \frac{1}{a^{-x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\substack{u\to 0\\ u>0}} a^u} = \frac{1}{1} = 1. \tag{16}$$

De (15) y (16) proviene que

$$\lim_{x\to 0} a^x = 1$$

(véase el § 3.2, (6), (7). Con ésto la propiedad 4) queda completamente demostrada).

Demostración de 5). Prefijemos un número $M > 0$ tan grande como se quiera. Existe un número racional α tal que $a^\alpha > M$, por lo cual

$$M < a^\alpha < a^x, \quad \forall x > \alpha.$$

Por consiguiente, $a^x \to +\infty$ cuando $x \to +\infty$.

Demostración de 6).

$$\lim_{x\to -\infty} a^x = \lim_{-x\to +\infty} \frac{1}{a^{-x}} = \frac{1}{\lim\limits_{u\to+\infty} a^u} = 0.$$

Demostración de 7). Observemos que con m natural tenemos, en virtud de 2):

$$a^{xm} = a^x \ldots a^x = (a^x)^m; \quad (a^{\frac{x}{m}})^m = a^{\frac{x}{m}} \ldots a^{\frac{x}{m}} = a^{\frac{x}{m}\cdot m} = a^x; \; a^{\frac{x}{m}} = (a^x)^{\frac{1}{m}}.$$

Para un número racional $\frac{p}{q} > 0$

$$(a^x)^{\frac{p}{q}} = (a^x)^{\frac{1}{q}\cdot p} = (a^{\frac{x}{q}})^p = a^{x\cdot\frac{p}{q}}.$$

Luego, si y es un número positivo arbitrario y $\alpha_n \to y$, donde α_n son los números racionales, entonces, por ser continua la función exponencial, tenemos

$$a^{xy} = \lim_{n\to\infty} a^{x\alpha_n} = \lim_{n\to\infty} (a^x)^{\alpha_n} = (a^x)^y$$

y 7) queda demostrada para $y > 0$.

Si $y < 0$, se tiene ($y = (y)$)

$$a^{xy} = a^{-x|y|} = \frac{1}{a^{x|y|}} = \frac{1}{(a^x)^{|y|}} = (a^x)^{-|y|} = (a^x)^y.$$

Si $0 < a < 1$, entonces se supone

$$a^x = \frac{1}{(1/a)^x}.$$

Las propiedades 1), 2), 4) quedan en este caso en vigor. La propiedad 3) tiene por expresión: $a^x > a^y$ $(x < y)$.

La propiedad 5): $a^x \to 0$, $x \to +\infty$.

La propiedad 6) tiene la forma: $a^x \to +\infty$, $x \to -\infty$.

d) Función $\log_a x$. Convengamos en considerar $a > 1$. Por cuanto la función $y = a^x$ es continua, crece estrictamente en $(-\infty, \infty)$ y aplica el intervalo $(-\infty, \infty)$ sobre el intervalo $(0, \infty)$, entonces existe una función inversa, también continua y estrictamente creciente en $(0, \infty)$. La llaman *logaritmo de y de base a y* la designan así:

$$x = \log_a y, \quad y \in (0, \infty).$$

De lo dicho se sigue que (sustituimos y por x)

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \log_a x = -\infty.$$

Cuando $a < 1$, los razonamientos son análogos. La función a^x también aplica el eje real $(-\infty, \infty)$ sobre el semieje $(0, \infty)$, siendo esta vez estrictamente decreciente. La función inversa $\log_a x$, definida en $(0, \infty)$, será asimismo estrictamente decreciente y ahora

$$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \log_a x = +\infty.$$

Tienen lugar las identidades (véase § 3.6)

$$a^{\log_a x} = x \ (0 < x < +\infty), \ \log_a a^x = x \ (-\infty < x < +\infty) \quad (17)$$

$(a \neq 1)$. De aquí, en vista de las propiedades de la función a^x, tenemos para $x, y > 0$:

$$a^{\log_a (xy)} = xy = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}$$

y

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y.$$

Si en esta igualdad sustituimos x por x/y, obtendremos

$$\log_a x - \log_a y = \log_a (x/y).$$

Luego (véase 7)),

$$a^{\log_a x^y} = x^y = (a^{\log_a x})^y = a^{y \log_a x} \quad (x > 0),$$

por lo cual

$$\log_a x^y = y \log_a x \quad (a \neq 1, \ x > 0). \tag{18}$$

Por fin, observemos que para los números positivos a y b, distintos de 1, tiene lugar

$$a^{\log_a b \cdot \log_b a} = (a^{\log_a b})^{\log_b a} = b^{\log_b a} = a,$$

y, por consiguiente

$$\log_a b \log_b a = 1.$$

El logaritmo del número a con la base e se denomina *logaritmo natural* del número a y se designa así: $\log_e a = \ln a$.

e) Volvamos a examinar la función potencial

$$y = x^n, \quad 0 < x < \infty.$$

Habida cuenta de lo dicho anteriormente, podemos decir que esta función tiene sentido no sólo para n racionales, sino también para n irracionales. Se puede escribirla (véanse (17) y (18)) así:

$$x^n = e^{n \ln x}, \tag{19}$$

de donde se ve que es continua representando una superposición de las funciones continuas

Cuando $n > 0$, la función es estrictamente creciente y posee las propiedades

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^n = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty.$$

Para $n > 0$ es natural considerar que $0^n = 0$, entonces la función se hace continua por la derecha en el punto $x = 0$.

Cuando $n < 0$, la función x^n es continua, y decrece estrictamente en el semieje positivo y posee las propiedades

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^n = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} x^n = 0.$$

De la fórmula (19) se deduce una propiedad característica de la función potencial

$$(xy)^n = e^{n \ln (xy)} = e^{n \ln x} e^{n \ln y} = x^n y^n$$

$(x, y) > 0$).

f) Función $y = u(x)^{v(x)}$. Supongamos que las funciones $u(x)$ y $v(x)$ están prefijadas en un entorno del punto a, a excepción, quizás, del mismo punto a, y que $u(x) > 0$ y $\lim\limits_{x\to a} u(x) = A > 0$, $\lim\limits_{x\to a} v(x) = B$ (A y B son los números finitos). En este caso

$$\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)} = A^B. \tag{20}$$

En efecto (véanse (17), (18)),

$$\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)} = \lim_{x\to a} e^{v(x)\ln u(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}[v(x)\ln u(x)]} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to a} v(x) \lim\limits_{x\to a} \ln u(x)} = e^{B\ln A} = A^B.$$

En la segunda igualdad de esta cadena se ha utilizado la continuidad de la función e^z, y en la cuarta igualdad, la continuidad de la función $\ln z$.

Si $u(x)$ y $v(x)$ son continuas en el punto $x = a$, y $u(a) > 0$, entonces, en cierto entorno de este punto $u(x) > 0$ (véase el § 3.3, teorema 4) y $A = u(a)$, $B = v(a)$. Por ello, en virtud de (20),

$$\lim_{x\to a} u(x)^{v(x)} = u(a)^{v(a)}.$$

Demos a conocer algunos casos de interés (no previstos por la igualdad (20)), cuando (para $x\to a$, $u > 0$) $u \to +\infty$, $v \to 0$; $v \to \infty$, $u \to 1$; $v \to 0$, $u \to 0$.

En los casos citados el teorema sobre el límite de $v \ln u$ no es válido. Sin disponer de la información exacta de cómo u y v tienden hacia los límites indicados resulta imposible dar de antemano la fórmula para $\lim\limits_{x\to a} u^v$. Para expresar u^v en el entorno del punto a dichos casos ofrecen las indeterminaciones del tipo ∞^0, 1^∞, 0^0.

g) Funciones trigonométricas $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ u otras. Dichas funciones son conocidas por el curso de trigonometría, donde se definen a partir de los razonamientos geométricos. Vamos a basarnos también en estas definiciones.

Podríamos dar una definición analítica pura para las funciones trigonométricas, pero no lo haremos aquí.

Observemos que la función $y = \operatorname{sen} x$ es continua (véase el § 3.3, ejemplo 3) y crece estrictamente en el segmento $[-\pi/2, \pi/2]$, aplicando este segmento sobre el segmento $[-1, 1]$. Pero, en tal caso tiene su inversa continua e uniforme

$$x = \operatorname{arcsen} y, \quad y \in [-1, 1].$$

Sin embargo, la función $y = \operatorname{sen} x$, analizada en todo el eje $(-\infty, \infty)$, tiene su inversa multiforme e incluso de infinitos valores, a saber

Arcsen y, todos los valores de la cual se calculan según la fórmula

$$x = \text{Arcsen } y = (-1)^k \arcsen y + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \qquad (21)$$

es decir, a cada $y \in [-1, 1]$ corresponde un conjunto de valores de x, determinados por la fórmula (21).

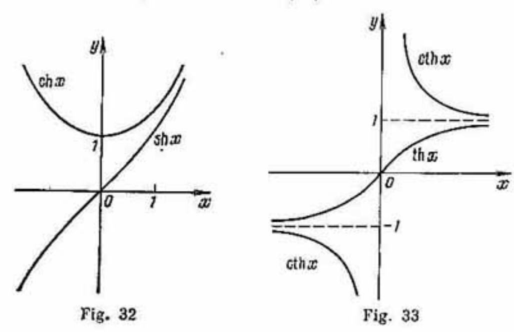


Fig. 32 Fig. 33

Análogamente, para las funciones

$$y = \cos x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi,$$
$$y = \operatorname{tg} x, \quad -\pi/2 < x < \pi/2,$$

sus funciones inversas serán

$$x = \arccos y, \quad y \in [-1, 1],$$
$$x = \operatorname{arctg} y, \quad y \in (-\infty, \infty),$$

y para las mismas funciones, analizadas en el eje real, las funciones inversas tendrán por expresión

$$x = \text{Arccos } y = \pm \arccos y + 2k\pi,$$
$$x = \text{Arctg } y = \operatorname{arctg} y + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

respectivamente.

b) Funciones hiperbólicas. Las funciones

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x},$$
$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

se denominan *seno, coseno, tangente y cotangente hiperbólicos*, respectivamente. Dibujemos sus gráficas (figs. 32 y 33). Las funciones sh x,

ch x, th x están definidas en $(-\infty, \infty)$, y cth x, en el mismo intervalo, a excepción del punto $x = 0$.

Es fácil comprobar que para estas funciones tienen lugar las fórmulas, análogas a las de la trigonometría corriente (pero no siempre coincidentes). Por ejemplo,

$$\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x,$$

$$\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y.$$

Suponiendo en la última igualdad $y = -x$, obtendremos

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

Notemos que todas las funciones examinadas aquí son continuas en sus dominios de definición. Para sh x, th x existen las funciones inversas *arcseno hiperbólico* $x =$ Arsh y y *arco tangente hiperbólico* de $x =$ Arth y, que son uniformes. La función inversa para ch x es también uniforme cuando $x \geqslant 0$.

§ 3.9. Límites notables

TEOREMA 1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Demostración. Por cuanto la función $y = \operatorname{sen} x$ es continua, $\operatorname{sen} x \to \operatorname{sen} 0 = 0$ para $x \to 0$. Por eso, la expresión $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ representa una indeterminación del tipo $\left(\frac{0}{0}\right)$. Determinemos el límite de esta indeterminación. Partiendo de las definiciones de funciones trigonométricas y de los razonamientos geométricos tenemos (fig. 34).

$$0 < \operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$$

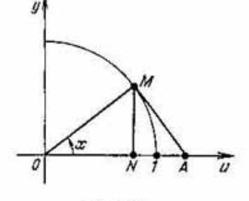


Fig. 34

siendo $0 < x < \pi/2$ ($MN = \operatorname{sen} x$, $AM \perp OM$, $AM = \operatorname{tg} x$, $OM = 1$). Compárense las áreas del triángulo $OM1$, del sector $OM1$ y del triángulo OMA). De aquí, al dividir por $\operatorname{sen} x > 0$, obtenemos

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x} \quad \text{o bien} \quad 1 > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x. \tag{1}$$

Las desigualdades (1) son lícitas también para $-\pi/2 < x < 0$, puesto que las funciones $\cos x$ y $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ son pares. Ahora, la función

$\cos x$ es continua, por lo tanto

$$\lim_{x\to 0} \cos x = \cos 0 = 1,$$

y, por consiguiente, pasando al límite en (1), en virtud del teorema 4 del § 3.2, obtenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

EJEMPLO 1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

TEOREMA 2.

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \qquad (2)$$

Demostración. En virtud de la definición de límite de una función hemos de probar que

$$\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \to e, \quad \forall x_n \to \infty. \qquad (3)$$

Si $x_n = n$ es natural, la afirmación de que se trata ya está demostrada. Para demostrar (2), es suficiente convencerse de que (2) es verídica en dos casos: cuando $x_n \to +\infty$ y cuando $x_n \to -\infty$, recorriendo los valores que no sean obligatoriamente enteros (véase la observación al final del § 3.2).

Sea x_n una variable arbitraria que tiende hacia $+\infty$ ($x_n \to +\infty$) y sea $[x_n] = k_n$ la parte entera del número x_n. Entonces, $k_n \leqslant x_n < k_n + 1 \leqslant x_n + 1 < k_n + 2$, y

$$\left(1 + \frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1} < \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n+1} < \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n+2} < e\left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^2.$$

Para $x_n \to +\infty$, $[x_n] = k_n \to +\infty$, de lo que podemos concluir que el primero y el último términos de la cadena de desigualdades tienden hacia e. Por ello

$$\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n+1} \to e,$$

y, puesto que en este caso $1 + \frac{1}{x_n} \to 1$, quiere decir que hemos demostrado (3) para $x_n \to +\infty$.

Si, ahora, $x_n \to -\infty$, entonces $x'_n = -x_n \to +\infty$ y

$$\lim_{x_n \to -\infty} \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = \lim_{x'_n \to +\infty} \left(1-\frac{1}{x'_n}\right)^{-x'_n} = \lim_{x'_n \to +\infty} \left(\frac{x'_n}{x'_n-1}\right)^{x'_n} =$$

$$= \lim_{x'_n \to +\infty} \left[\left(1+\frac{1}{x'_n-1}\right)^{x'_n-1}\left(1+\frac{1}{x'_n-1}\right)\right] = e,$$

es decir, queda demostrada (2).

EJEMPLO 2.

$$\lim_{u \to 0} (1+u)^{1/u} = e.$$

Se obtiene de (2) mediante la sustitución $1/x = u$.

EJEMPLO 3.

$$\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{\alpha} = e^{\alpha}, \quad \lim_{u \to 0} (1+\alpha u)^{1/u} = e^{\alpha}, \ \forall \alpha.$$

Cuando $\alpha = 0$, esta expresión se reduce al límite $\lim_{x \to \infty} 1^x = 1 = e^0$, porque, según la definición, se considera que $1^x = 1$.

Sea ahora $\alpha \neq 0$. Si $x \to \infty$, entonces $\frac{x}{\alpha} \to \infty$ y

$$\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = \left[\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^{x/\alpha}\right]^{\alpha} = u^{\alpha} \underset{u \to e}{\to} e^{\alpha}.$$

Se debe tomar en cuenta que la función potencial u^{α} es continua en el punto $u = e$ (véase el § 3.8, e)).

EJEMPLO 4.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$$

Como $\ln u$ es una función continua en $(0, \infty)$, entonces (véase el ejemplo 2)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \ln (1+x)^{1/x} = \ln \lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = \ln e = 1.$$

EJEMPLO 5.

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a \quad (a > 0) \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1.$$

En efecto, pongamos $a^x - 1 = u$. Debido a la continuidad de la función potencial, $u \to 0$, cuando $x \to 0$. Luego, $x \ln a = \ln(1+u)$, por lo cual (véase el ejemplo 4)

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x-1}{x} = \lim_{u \to 0} \frac{u}{\ln(1+u)} \ln a = \ln a \cdot \lim_{u \to 0} \frac{u}{\ln(1+u)} = \ln a.$$

§ 3.10. Orden de la variable. Equivalencia

Analizaremos dos funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$, definidas en cierto entorno $U(a)$ del punto a, salvo, quizás, en el propio punto a. El punto a puede ser finito o infinito ($+\infty$, $-\infty$, o bien ∞). Convengamos en considerar, además, que $\psi(x) \neq 0$ en $U(a)$. Si

$$\lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0, \tag{1}$$

escribiremos este hecho así:

$$\varphi(x) = o(\psi(x)), \quad x \to a, \tag{1'}$$

y diremos que $\varphi(x)$ *es o-pequeño de* $\psi(x)$ *para* $x \to a$.

Por ejemplo,

$$x^2 = o(x), \qquad x \to 0;$$
$$x^n = o(x^m), \qquad x \to 0, \quad \text{si } m < n;$$
$$x^n = o(x^m), \qquad x \to \infty, \quad \text{si } m > n;$$
$$(x-a)^4 = o((x-a)^3), \quad x \to a;$$
$$1 - \cos x = o(x), \qquad x \to 0, \text{ porque } \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0.$$

La expresión $o(1)$, $x \to a$, significa un infinitésimo para $x \to a$, esto es, una cierta función $\varphi(x)$ que tiende a cero cuando $x \to a$ ($\varphi(x) \to 0$, $x \to a$). Por ejemplo, $\varphi(x) = \frac{1}{\ln x} = o(1)$, $x \to +\infty$.

La propiedad (1) expresa, obviamente, el hecho de que la función $\varphi(x)$ puede ser escrita en la forma $\varphi(x) = \varepsilon(x)\psi(x)$, donde $\varepsilon(x) \to 0$ cuando $x \to a$.

Si las funciones φ y ψ, que figuran en la relación (1) (o bien, que es lo mismo, en (1')) son unos infinitésimos para $x \to a$, suele decirse también, empleando la terminología más antigua, que $\varphi(x)$ *para* $x \to a$ *es un infinitésimo de orden superior con relación a* (un infinitésimo) $\psi(x)$. En cambio, si φ y ψ en (1) son infinitamente grandes para $x \to a$, dicen que $\varphi(x)$, es, para $x \to a$, *una magnitud infinitamente grande de orden inferior que* $\psi(x)$, o bien, además, que $\psi(x)$ *es una magnitud infinitamente grande de orden superior respecto a* $\varphi(x)$.

Escribiremos en adición

$$\varphi(x) \approx \psi(x), \quad x \to a \tag{2}$$

y llamaremos las funciones $\varphi(x)$ y $\psi(x)$ *equivalentes* (*asintóticamente iguales*) *para* $x \to a$, si se cumple la propiedad

$$\lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1. \tag{2'}$$

Por ejemplo,

$$\operatorname{sen} x \approx x, \quad x \to 0, \tag{3}$$

o abajo vienen unos ejemplos más (véanse también los ejemplos 1, 4, 5 en el § 3.9)

$$1 - \cos x \approx x^2/2, \qquad x \to 0, \tag{4}$$

$$\ln(1 + x) \approx x, \qquad x \to 0, \tag{5}$$

$$e^x - 1 \approx x, \qquad x \to 0, \tag{6}$$

$$a^x - 1 \approx x \ln a, \quad x \to 0. \tag{7}$$

Observemos que si

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \neq 0,$$

esto es equivalente al hecho de que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{A} = 1,$$

lo que nos hemos convenido designar también así:

$$f(x) \approx A, \quad x \to a \ (A \neq 0). \tag{8}$$

La terminología que se ha introducido aquí es indispensable para simplificar los cálculos y reducir las anotaciones en las fórmulas. Resulta importante para ello asimilar ciertas propiedades sencillas de las funciones asintóticamente iguales (equivalentes), las cuales vienen expresadas en los siguientes teoremas.

TEOREMA 1. *Si*

$$\varphi(x) \approx \psi(x), \quad x \to a, \tag{9}$$

entonces

$$\psi(x) \approx \varphi(x), \quad x \to a. \tag{10}$$

Demostración. El hecho es que si $\psi(x) \neq 0$ en $U(a)$ y se cumple (9), entonces, evidentemente, también $\varphi(x) \neq 0$, quizás, en un entorno algo reducido. Pero, en este caso

$$\lim_{x\to a} \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{1}{\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}} = \frac{1}{1} = 1.$$

TEOREMA 2. *Para que se cumpla la propiedad* (9), *es necesario y suficiente que se verifique*

$$\varphi(x) = \psi(x) + o(\psi(x)),\ x \to a. \quad (11)$$

La igualdad (11) debe leerse así: el sumando que se agrega a $\psi(x)$ con el fin de obtener $\varphi(x)$ posee la propiedad siguiente: si lo dividimos por $\psi(x)$, el cociente resultante tenderá hacia cero cuando x se hace tender hacia a.

Demostración. Supongamos que tiene lugar (9). En este caso

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1 + \varepsilon(x),\ \text{donde } \varepsilon(x) \to 0 \text{ para } x \to a.$$

Por consiguiente,

$$\varphi(x) = \psi(x) + \varepsilon(x)\psi(x) = \psi(x) + o(\psi(x)), \quad x \to a,$$

y hemos demostrado (11).

Viceversa, si se verifica (11), tenemos

$$\varphi(x) = \psi(x) + o(\psi(x)) = \psi(x) + \varepsilon(x)\psi(x),$$

donde $\varepsilon(x) \to 0$ cuando $x \to a$. Por tanto

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1 + \varepsilon(x) \underset{x \to a}{\to} 1,$$

y hemos obtenido (9).

TEOREMA 3. *Si*

$$\psi(x) \approx \psi_1(x), \quad x \to a,$$

entonces

$$\lim_{x \to a} [\varphi(x)\psi(x)] = \lim_{x \to a} [\varphi(x)\psi_1(x)], \quad (12)$$

$$\lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi_1(x)}. \quad (13)$$

Estas igualdades se deben entender en el sentido de que si existe en ellas un límite por la derecha, existe también un límite por la izquierda y dichos límites son iguales, y viceversa.

De aquí se deduce que si alguno de dichos límites no existe, tampoco existe el segundo.

Demostración. Mostremos sólo uno de estos razonamientos. Supongamos que existe el límite por la derecha en (12). Entonces

$$\lim_{x \to a} [\varphi(x)\psi(x)] = \lim_{x \to a} \left[\varphi(x)\psi_1(x)\frac{\psi(x)}{\psi_1(x)}\right] =$$

$$= \lim_{x \to a} [\varphi(x)\psi_1(x)] \lim_{x \to a} \frac{\psi(x)}{\psi_1(x)} =$$

$$= \lim_{x \to a} [\varphi(x)\psi_1(x)] \cdot 1 = \lim_{x \to a} [\varphi(x)\psi_1(x)].$$

EJEMPLO 1. $\operatorname{tg} x \approx x$, $x \to 0$, puesto que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}\right) = 1.$$

EJEMPLO 2.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^3 x}{x^3+x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^3+x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{0}{1} = 0.$$

DEFINICIÓN. *Si para la función $\varphi(x)$ se pueden elegir tales números A y m, donde $A \neq 0$, que*

$$\varphi(x) \approx A(x-a)^m, \quad x \to a,$$

se dice que la función $A(x-a)^m$ es el término potencial principal de la función $\varphi(x)$ en el entorno del punto a.

Los miembros derechos de las relaciones (3)—(7) son, evidentemente, términos potenciales principales de los primeros miembros cuando $x \to 0$.

Diremos que f en el conjunto E es *de orden* φ, o, de otro modo, f es *O grande de* φ en E y en este caso anotaremos

$$f(x) = O(\varphi(x)) \text{ en } E, \tag{14}$$

si

$$|f(x)| \leqslant C\,|\varphi(x)|, \quad \forall x \in E,$$

donde C es una constante positiva que no depende de x.

En particular, la igualdad

$$f(x) = O(1) \text{ en } E$$

muestra el hecho de que f está acotada en E.

EJEMPLOS:

1) $\operatorname{sen} x = O(1)$, $\operatorname{sen} x = O(x)$ en $(-\infty, \infty)$;
2) $x = O(x^2)$ en $[1, \infty)$;
3) $x^2 = O(x)$ en $[0, 1]$.

Capítulo 4

Cálculo diferencial de las funciones de una sola variable

§ 4.1. Derivada

El concepto de derivada es fundamentalísimo en el análisis matemático, a la par con el de integral.

Se denomina derivada de la función f en el punto x el límite de la razón de su incremento Δy en dicho punto al incremento correspondiente del argumento Δx, cuando éste último incremento tiende a cero.

La derivada suele designarse así:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Son de amplio uso también otras designaciones: y', $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$. La comodidad de tal o cual designación se apreciará por el lector más adelante.

Siendo x fijo, la magnitud $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es una función de Δx:

$$\psi(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (\Delta x \neq 0).$$

Para que exista la derivada de f en el punto x, es necesario que la función f sea definida en cierto entorno del punto x, incluso en el mismo punto x. Entonces, la función $\psi(\Delta x)$ está definida para Δx suficientemente pequeños y distintos de cero, es decir, para aquellos Δx que satisfacen las desigualdades $0 < |\Delta x| < \delta$, donde δ es lo suficientemente pequeño.

Desde luego, el límite (1) existe no para toda función f definida en el entorno del punto x. En general se dice que la función f tiene en el punto x una derivada $f'(x)$, se supone, como regla, que es finita, es decir, el límite (1) es finito. No obstante, puede suceder que exista el límite (1) infinito, igual a $+\infty$, $-\infty$, o ∞. En estos casos resulta conveniente decir que la función f tiene en el punto x *una derivada infinita* (igual a $+\infty$, $-\infty$, o ∞).

Si se supone en la fórmula (1) que $\Delta x \to 0$, tomando sólo los valores positivos ($\Delta x > 0$), entonces el límite correspondiente (si existe) recibe el nombre de *derivada derecha de f en el punto x*. Se puede designarlo así: $f'_{der}(x)$.

Análogamente, cuando $\Delta x \to 0$ al recorrer los valores negativos ($\Delta x < 0$), el límite (1) se llama *derivada izquierda de f en el punto x* ($f'_{izq}x$)).

Por supuesto, para el cálculo de $f'_{der}(x)$ (de $f'_{izq}(x)$, respectivamente) sólo es necesario que la función f esté definida en el punto x y por la derecha de él, en cierto entorno suyo (en x y a la izquierda de x, respectivamente).

Resulta ser típico el caso en que f viene definida en el segmento $[a, b]$ y tiene en todos los puntos interiores de este segmento, es decir, en los puntos del intervalo (a, b), una derivada, con la particularidad de que en el punto a tiene derivada derecha y en el punto b, derivada izquierda. En los casos como éste dicen que *la función f tiene derivada en el segmento $[a, b]$* sin especificar que, de hecho, en el punto a tiene sólo derivada derecha y en el punto b, sólo derivada izquierda.

Fig. 35

No es difícil ver que si la función f tiene en el punto x las derivadas derecha e izquierda y estas derivadas son iguales, la función f tiene *derivada* en x:

$$f'_{der}(x) = f'_{izq}(x) = f'(x).$$

Mas, si en x existen las derivadas derecha e izquierda y no son iguales entre sí ($f'_{der}(x) = f'_{izq}(x)$), entonces *en x no hay derivada.*

EJEMPLO. Veamos la función $y = |x|$ (fig. 35). Para dicha función

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|x+\Delta x| - |x|}{\Delta x}.$$

Si $x > 0$, tenemos $x + \Delta x > 0$ para Δx suficientemente pequeños y

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \quad (x > 0).$$

Si $x < 0$, tenemos $x + \Delta x < 0$ para Δx suficientemente pequeños y

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-(x+\Delta x) - (-x)}{\Delta x} = -\frac{\Delta x}{\Delta x} = -1 \quad (x < 0).$$

De este modo,

$$|x|' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0, \\ -1, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Sea ahora $x = 0$. Entonces

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \text{signo } \Delta x \,\frac{\Delta x}{\Delta x} = \text{signo } \Delta x = \begin{cases} 1, & \text{si } \Delta x > 0, \\ -1, & \text{si } \Delta x < 0. \end{cases}$$

Por esta razón

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1, \qquad \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1.$$

Así pues, la función $|x|$ tiene en el punto $x = 0$ una derivada derecha igual a 1, y una derivada izquierda igual a -1, lo que es indicio de que en el punto $x = 0$ la función $|x|$ está privada de la *derivada*.

Sabemos que (véase el § 3.3, ejemplo 8) $|x|$ es una función continua para todos los valores de x, incluso en el punto $x = 0$, razón por la cual puede intervenir como ejemplo de una función continua en todo punto sin que tenga derivada en uno de ellos. En las matemáticas se conocen ejemplos de las funciones que son continuas en todo el eje real y no tienen derivada en ningún punto de éste. Tal es, por ejemplo, la función de Weierstrass representada por una serie trigonométrica

$$\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \operatorname{sen} 2^n \pi x.$$

No nos detendremos en los pormenores de esta cuestión.

Por otra parte, *toda función que tiene derivada (¡finita!) en el punto x es continua en este punto.*

Efectivamente, supongamos que el límite (1) existe en el punto x y es finito. Este hecho puede ser expresado del modo siguiente:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon(\Delta x), \tag{2}$$

donde $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$, es decir, $\varepsilon(\Delta x)$ es un infinitésimo para $\Delta x \to 0$. De (2) se deduce:

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \Delta x \cdot \varepsilon(\Delta x).$$

Pasando al límite en esta igualdad cuando $\Delta x \to 0$, obtendremos

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0,$$

y esto muestra que f es continua en el punto x.

Demos a conocer algunas aplicaciones importantes de la derivada.

VELOCIDAD INSTANTÁNEA. Supongamos que la función $s = f(t)$ expresa la ley de movimiento de un punto en una recta, la cual se considera como el eje de coordenadas s. Aquí s es la coordenada del punto móvil en cierto instante t. El camino recorrido por el punto durante el intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$, es

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t).$$

La velocidad media del punto en dicho intervalo de tiempo es

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

La velocidad verdadera (instantánea) en el instante t se define, naturalmente, como un límite

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = f'(t).$$

INTENSIDAD DE LA CORRIENTE. Sea $Q = f(t)$ una cantidad de electricidad que pasa por la sección de un alambre durante el tiempo t. Entonces

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

será la intensidad media de la corriente durante el intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$.

El límite

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = Q' = I$$

es la intensidad de la corriente en el instante t.

DENSIDAD DE DISTRIBUCIÓN DE LA MASA. Supongamos que en el segmento $[a, b]$ (fig. 36) del eje x está distribuida una masa (irregularmente, en el caso general), de suerte que la cantidad de la masa cargada sobre el segmento $[a, x]$ es

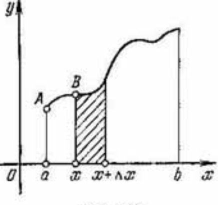


Fig. 36

$$M = F(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Esta cantidad es proporcional al área de la figura $aABx$. De este modo, M es una función de x ($M = F(x)$). La cantidad de la masa que corresponde al segmento $[x, x + \Delta x]$ es igual, evidentemente, a

$$\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x).$$

Su densidad media en este segmento es igual a $\frac{\Delta F}{\Delta x}$ y el límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = F'(x) = \mu$$

es *la densidad verdadera de distribución de la masa en el punto x.*

§ 4.2. Interpretación geométrica de la derivada

Supongamos que en el intervalo (a, b) está prefijada una función continua $y = f(x)$. Su gráfica lleva el nombre de *curva continua.* Designémosla mediante Γ. Tomemos en Γ un punto $A = (x, f(x))$

(figs. 37 y 38) y nos ponemos como objetivo determinar la tangente a Γ en el punto elegido. Con este fin elijamos en Γ otro punto $B = (x + \Delta x, f(x + \Delta x))$, donde $\Delta x \neq 0$ (en la fig. 37 está expuesto el caso en que $\Delta x > 0$, y en la fig. 38, el caso en que $\Delta x < 0$). Llamemos *secante* a una recta que pasa por los puntos A y B y está orientada en la dirección de crecimiento de x (marcada por la flecha); designemos la secante con S. Un ángulo que S forma con la dirección positiva del eje x se designará con β. Consideramos que $-\pi/2 < \beta < \pi/2$. Cuando $\beta > 0$, el ángulo se cuenta a partir del eje x en el sentido contrahorario; cuando $\beta < 0$, en el sentido horario.

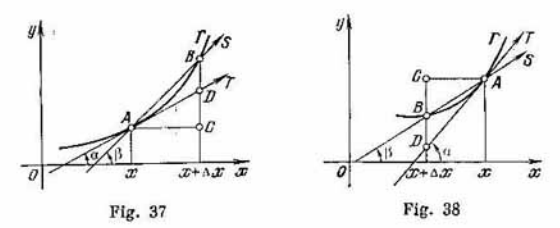


Fig. 37 Fig. 38

En las figuras mencionadas $\beta > 0$. En la fig. 37 $\Delta x = AC$, $\Delta y = CB$; en la fig. 38 $\Delta x = -AC$, $\Delta y = -CB$. En ambos casos $\Delta y/\Delta x = tg\,\beta$.

Si $\Delta x \to 0$, entonces $\Delta y \to 0$ y el punto B, desplazándose por Γ, tiende hacia A. Si en este caso el ángulo β tiende hacia cierto valor α, distinto de $\pi/2$ y $-\pi/2$, existe un límite

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\beta \to \alpha} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha, \qquad (1)$$

igual a la derivada (finita) de f en el punto x:

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha. \qquad (2)$$

Viceversa, si existe la derivada (finita) $f'(x)$, entonces $\beta \to \alpha = \operatorname{arctg} f'(x)$.

Cuando β tiende hacia α, la secante S trata de ocupar la posición de la recta orientada T que pasa por el punto A y que forma el ángulo α con la dirección positiva del eje x.

La recta orientada T recibe el nombre de *tangente a la curva* Γ *en su punto* A.

DEFINICIÓN. *Se denomina tangente a la curva* Γ $(y = f(x))$ *en el punto de ésta* $A = (x, f(x))$ *una recta orientada* T, *a la cual tiende la secante* S (*una recta orientada en la dirección de crecimiento de* x)

que pasa por A y el punto $B = (x + \Delta x, f(x + \Delta x)) \in \Gamma$, *cuando* $\Delta x \to 0$.

Hemos demostrado que *si una función continua* $y = f(x)$ *tiene derivada finita* $f'(x)$ *en el punto* x, *su gráfica* Γ *en el punto correspondiente tiene la tangente cuyo coeficiente angular es* $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$ $(-\pi/2 < \alpha < \pi/2)$.

Viceversa, la existencia del límite

$$\text{lím } \beta = \alpha \ (-\pi/2 < \alpha < \pi/2)$$

lleva consigo la existencia de la derivada finita $f'(x)$ y la validez de las igualdades (1), (2).

Puede ocurrir que f tenga en el punto x las derivadas derecha e izquierda diferentes:

$$f'_{\text{izq}}(x) \neq f'_{\text{der}}(x).$$

Fig. 39

Entonces, A es un punto *anguloso* de Γ. En este caso la tangente a Γ en A no existe, pero se puede decir que existen las tangentes derecha e izquierda con diferentes coeficientes angulares:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} f'_{\text{izq}}(x),$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'_{\text{der}}(x).$$

En la fig. 39 se expone precisamente un ejemplo de tal caso.

Supongamos ahora que la derivada de f en el punto x es infinita:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$$

Notemos aquí cuatro casos de importancia:

1) $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty, \quad \beta \to \dfrac{\pi}{2}$ (fig. 40)

2) $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty \quad \beta \to -\dfrac{\pi}{2}$ (fig. 41)

3) $f'_{\text{izq}} = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty. \quad \beta \to -\dfrac{\pi}{2}.$

$f'_{\text{der}}(x) = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty, \quad \beta \to \dfrac{\pi}{2}$

La tangente izquierda es perpendicular al eje x y está orientada hacia abajo. La tangente derecha es perpendicular al eje x y está

orientada hacia arriba (fig. 42).

$$4)\quad f'_{\text{izq}}(x)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x<0}}\frac{\Delta y}{\Delta x}=+\infty,\qquad \beta\to\frac{\pi}{2},$$

$$f'_{\text{der}}(x)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\infty,\quad \beta\to-\frac{\pi}{2}.$$

Las tangentes izquierda y derecha están orientadas de modo tal que son paralelas al eje y, la primera hacia arriba y la segunda hacia abajo (fig. 43).

Observación. La definición corriente de la tangente a una curva Γ es como sigue: la tangente T a la curva Γ en su punto A es

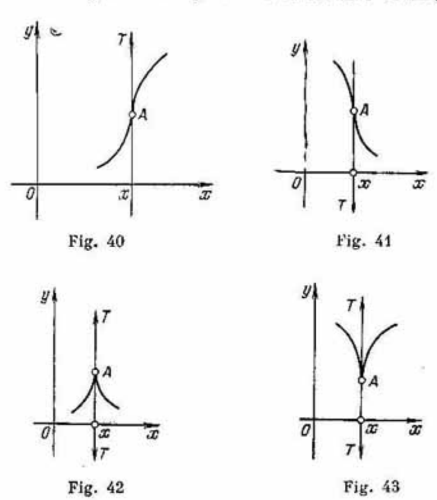


Fig. 40

Fig. 41

Fig. 42

Fig. 43

una recta a la cual tiende la secante S, que pasa por el punto A y otro punto $B\in\Gamma$, cuando el último, desplazándose por Γ, tiende hacia A.

En esta definición no se supone que S y T son las rectas orientadas. Dicha definición es bien correcta en el caso de una tangente no paralela al eje y. Sin embargo, si la aplicamos, por ejemplo, al caso 4) (véase la fig. 43, donde A es un punto anguloso), llegaremos a que

la curva dada tiene en el punto A una tangente única. Esto no concuerda con nuestra idea sobre la suavidad de una curva que tiene tangente.

La definición aducida presupone en el punto A dos tangentes (coincidentes) que tienen orientaciones contrarias. El ángulo formado por ellas es igual a π.

Por el curso de la geometría analítica sabemos que la ecuación de una recta (en un plano) que pasa por el punto (x_0, y_0) bajo el ángulo α respecto de la dirección positiva del eje x $(-\pi/2 < \alpha < \pi/2)$ tiene por expresión [1] $y - y_0 = m(x - x_0)$ $(m = \operatorname{tg}\alpha)$. De aquí la ecuación de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto (x_0, y_0) tiene la forma

$$y - y_0 = y_0'(x - x_0), \tag{3}$$

donde $y_0 = f(x_0)$, $y_0' = f'(x_0)$.

Una recta que pasa por el punto $A \in \Gamma$ es perpendicular respecto de la tangente a Γ en el mismo punto lleva el nombre de *normal a Γ en el punto A*. Su ecuación, evidentemente, tiene por expresión

$$y - y_0 = -\frac{1}{y_0'}(x - x_0). \tag{4}$$

EJEMPLO 1. [2]). Hállese la ecuación de la tangente a una curva

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (-a \leqslant x \leqslant a) \tag{5}$$

en cierto punto (x_0, y_0) de la curva, es decir, $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$.

La curva (5) se llama *elipse*. Es evidente que la elipse es simétrica respecto de los ejes coordenados, puesto que su ecuación no varía cuando se sustituyen x por $(-x)$ e y por $(-y)$. Vamos a considerar, al deducir la ecuación de la tangente, que $-a \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$. De (5) tenemos

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \tag{5'}$$

De aquí $y' = \dfrac{-bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Calculemos la función y y la derivada y' en el punto x_0':

$$y_0 = y(x_0) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2}, \quad y'(x_0) = \frac{-bx_0}{a\sqrt{a^2 - x_0^2}},$$

$$y_0 y'(x_0) = -\frac{b^2}{a^2}x_0. \tag{6}$$

La ecuación de la tangente a la elipse en el punto (x_0, y_0):

$$Y - y_0 = y'(x_0)(X - x_0). \tag{7}$$

[1]) Véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Elementos del algebra lineal y de la geometría analítica», § 8.

[2]) Los ejemplos 1, 2, 3 pueden ser analizados en el § 4.8, al haber dominado la técnica de diferenciación.

Al multiplicar (7) por y_0/b^2, tendremos, en virtud de (6):

$$\frac{Yy_0}{b^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=y'(x_0)\left(\frac{Xy_0}{b^2}-\frac{x_0y_0}{b^2}\right),$$

$$\frac{Yy_0}{b^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=-\frac{Xx_0}{a^2}+\frac{x_0^2}{a^2}.$$

Puesto que en nuestro caso $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$, la ecuación de la tangente se escribirá así:

$$\frac{Xx_0}{a^2}+\frac{Yy_0}{b^2}=1. \tag{8}$$

De este modo, con el fin de obtener la ecuación de la tangente a una elipse en el punto (x_0, y_0) de ésta, se debe en la ecuación de la elipse (5) sustituir x^2 por Xx_0 e y^2 por Yy_0.

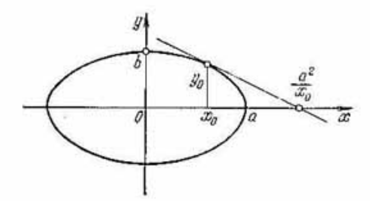


Fig. 44

Por los valores negativos de y $(-b \leqslant y < 0)$ los razonamientos quedan los mismos y (8) será la ecuación de la tangente en cualquier punto (x_0, y_0) de la elipse. De la ecuación (8) se ve que la tangente a una elipse en el punto (x_0, y_0) corta el eje x en el punto de abscisa a^2/x_0, es decir, cuando $x_0 > 0$, este punto de intersección se halla a la derecha de la elipse, y cuando $x_0 < 0$, a la izquierda de ella (fig. 44).

EJEMPLO 2. Hállese la ecuación de la tangente a una curva

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (|x| \geqslant a) \tag{9}$$

en cierto punto (x_0, y_0) de la misma $\left(\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}\right)=1$.

La curva (9) se llama *hipérbola*. Esta curva es también simétrica respecto de los ejes de coordenadas.

Razonando igual que en el ejemplo 1, obtendremos la ecuación de la tangente a una hipérbola en la forma

$$\frac{Xx_0}{a^2}-\frac{Yy_0}{b^2}=1 \quad (|x_0| \geqslant a).$$

El punto de intersección de esta tangente con el eje x tiene la abscisa a^2/x_0 $\left(0 < \frac{a^2}{|x_0|} \leqslant a\right)$, es decir, dicho punto de intersección se halla en $(0, a]$ para $x_0 \geqslant a$, y en $[-a, 0)$ para $x_0 \leqslant -a$ (fig. 45).

EJEMPLO 3. Hállese la ecuación de la tangente a una curva

$$y^2 = 2px \quad (x \geqslant 0,\ p > 0) \tag{10}$$

en cierto punto (x_0, y_0) de la misma $(y_0^2 = 2px_0)$

La curva dada se llama *parábola*. Es simétrica respecto del eje x (es decir, en (10) x es una función par de y). En virtud de ello nos

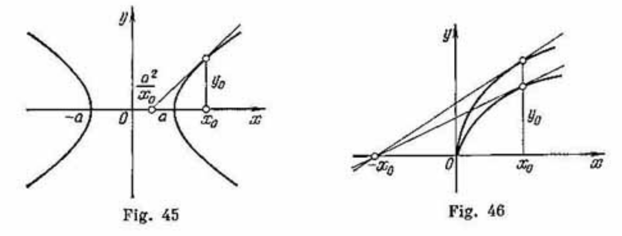


Fig. 45

Fig. 46

resulta suficiente examinar la mitad superior de la parábola $(y > 0)$. De (10) tenemos

$$y = \sqrt{2px}. \tag{10'}$$

De aquí

$$y' = \frac{p}{\sqrt{2px}}, \quad y_0 = \sqrt{2px_0}, \quad y'(x_0) = \frac{p}{\sqrt{2px_0}} = \frac{p}{y_0}.$$

La ecuación de la tangente a una parábola en el punto $(x_0\ y_0)$:

$$Y - y_0 = y'(x_0)(X - x_0)$$

o bien

$$Y - y_0 = \frac{p}{y_0}(X - x_0), \quad Yy_0 - y_0^2 = pX - px_0.$$

Puesto que $y_0^2 = 2px_0$, entonces

$$Yy_0 = p(X + x_0). \tag{11}$$

De este modo, con el fin de obtener la ecuación de la tangente a una parábola en su punto (x_0, y_0), hay que en la ecuación de la parábola (10) sustituir y^2 por Yy_0, y $2x$ por $X + x_0$.

La tangente (11) a la parábola (10') en el punto (x_0, y_0) de la misma corta el eje x en un punto de abscisa $(-x_0)$ (fig. 46), inde-

pendientemente de la magnitud de p, o sea, las tangentes a cualesquiera parábolas $y^2 = 2px$ en el punto $(x_0, \sqrt{2px_0})$ cortan el eje x en un mismo punto $(-x_0)$.

§ 4.3. Derivadas de las funciones elementales

La constante C. A cada x corresponde un mismo valor de $y = C$. De tal manera, al valor $x + \Delta x$ corresponde el valor de la función $y + \Delta y = C$. Por consiguiente,

$$C' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C-C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0. \tag{1}$$

La función potencial x^n $(n = 1, 2, \ldots)$.

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \tag{2}$$

puesto que

$$\frac{1}{\Delta x}[(x+\Delta x)^n - x^n] =$$
$$= \frac{1}{\Delta x}\left[x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x^2 + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \Delta x^n - x^n\right] = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + \ldots$$
$$\ldots + \Delta x^{n-1} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} nx^{n-1}.$$

Son válidas las fórmulas

$$(u \pm v)' = u' \pm v', \tag{3}$$
$$(uv)' = uv' + u'v, \tag{4}$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0). \tag{5}$$

Aquí se supone que $u = u(x)$, $v = v(x)$ son las funciones de x que tienen en el punto x una derivada. En el caso (5) se supone en adición que $v(x) \neq 0$. Se afirma que en este caso existen en el punto x las derivadas que figuran en el primer miembro de las igualdades (3), (4), (5), y estas igualdades son lícitas.

En efecto, prefijemos Δx. Al nuevo valor $x + \Delta x$ del argumento corresponden los valores nuevos de nuestras funciones $u + \Delta u$, $v + \Delta v$, y

$$\Delta(u \pm v) = [(u + \Delta u) \pm (v + \Delta v)] - (u \pm v) = \Delta u \pm \Delta v,$$

$$(u \pm v)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u \pm v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u' \pm v'.$$

Luego (las explicaciones vienen más abajo)

$$\Delta (uv) = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v,$$

$$(uv)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta (uv)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\,\Delta v}{\Delta x} =$$

$$= u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} =$$

$$= uv' + vu' + 0v' = uv' + vu'.$$

Se debe tomar en consideración que la función u es contínua, puesto que tiene la derivada, y por esto $\Delta u \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$. Por fin,

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v}\right) \frac{1}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\,\Delta u - u\,\Delta v}{(v+\Delta v)\, v\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{(v+\Delta v)\, v} = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Esta vez también se debe tener en cuenta que $\Delta v \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$, ya que la función v es continua, pues tiene una derivada.

Examinemos la función $\operatorname{sen} x$. Tenemos

$$(\operatorname{sen} x)' = \cos x, \tag{6}$$

porque

$$(\operatorname{sen} x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+\Delta x) - \operatorname{sen} x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \operatorname{sen} \dfrac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

Es necesario tener en cuenta que la función $\cos x$ es continua.

Análogamente se demuestra que

$$(\cos x)' = -\operatorname{sen} x, \tag{7}$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \tag{8}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\operatorname{cosec}^2 x = \frac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}. \tag{9}$$

En efecto, por ejemplo,

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\,(\operatorname{sen} x)' - \operatorname{sen} x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x.$$

Para la función $y = \log_a x$ $(x > 0)$ tenemos

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a (x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \frac{\log_a \left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x} \frac{\log_a \left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

Haciendo uso del límite notable

$$\lim_{u \to 0} \frac{\log_a (1+u)}{u} = \log_a e,$$

obtenemos

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}. \tag{10}$$

En particular

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \tag{10'}$$

§ 4.4. Derivada de una función compuesta

TEOREMA 1. *Si una función $x = \varphi(t)$ tiene derivada en el punto t, y la función $y = f(x)$ tiene derivada en el punto x, entonces la función compuesta*

$$y = F(t) = f[\varphi(t)] \tag{1}$$

tiene derivada (respecto de t) en el punto t y se verifica la igualdad

$$F'(t) = f'(x)\varphi'(t) \tag{2}$$

o bien

$$y'_t = y'_x x'_t. \tag{3}$$

Demostración. Prefijemos un t, le corresponde el valor de $x = \varphi(t)$. Demos a t un incremento $\Delta t \neq 0$, esto originará un incremento $\Delta x = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)$. Como la función $y = f(x)$ tiene derivada en el punto x, entonces, en virtud de la igualdad (2) en el § 4.1, tenemos

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x, \tag{4}$$

donde $\varepsilon(\Delta x) \to 0$ para $\Delta x \to 0$.

Convengamos en considerar que $\varepsilon(0) = 0$. La igualdad (4) en este caso se verifica y si ponemos en ella $\Delta x = 0$, se obtendrá $0 = 0$.

Dividamos ahora la igualdad (4) por $\Delta t \neq 0$.

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(x)\frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon(\Delta x)\frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{5}$$

Haremos tender Δt hacia cero. Entonces, $\Delta x \to 0$, puesto que la función $x(t) \equiv \varphi(t)$ tiene derivada en el punto t y, por lo tanto, es continua.

Pasemos en la igualdad (5) al límite para $\Delta t \to 0$. En este caso $\Delta x \to 0$ y $\varepsilon(\Delta x) \to 0$, debido a lo cual obtenemos

$$y'_t = f'(x)\, x'(t) + 0 \cdot x'(t) = f'(x)\, x'(t) = y'_x \cdot x'_t.$$

El teorema está demostrado.

Se puede hacer la fórmula (3) más compleja. Por ejemplo, si $z = f(y)$, $y = \varphi(x)$, $x = \psi(\xi)$ y todas estas tres funciones tienen derivadas en los puntos correspondientes, entonces $z'_\xi = z'_y y'_x x'_\xi$.

EJEMPLO 1. $y = \ln \operatorname{sen}^2 x$ $(x \neq k\pi)$.

Suponemos $y = \ln u$, $u = v^2$, $v = \operatorname{sen} x$. En este caso

$$y'_x = y'_u u'_v v'_x = \frac{1}{u}\, 2v \cos x = \frac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = 2 \operatorname{ctg} x.$$

EJEMPLO 2. $y = \operatorname{sen}(x^2 + 2x - 1)$.

Suponemos $u = x^2 + 2x - 1$. Entonces

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \cos u \cdot (2x + 2) = 2(x + 1) \cos(x^2 + 2x - 1).$$

Durante los cálculos, las variables auxiliares $u, v, \ldots$ no se introducen, como regla, pero se sobreentienden.

En el caso del ejemplo 1 los cálculos son de forma siguiente:

$$y'_x = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} (\operatorname{sen}^2 x)' = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\, 2 \operatorname{sen} x (\operatorname{sen} x)' = \frac{2}{\operatorname{sen} x} \cos x = 2 \operatorname{ctg} x,$$

o bien, en la forma más breve

$$y'_x = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\, 2 \operatorname{sen} x \cos x = 2 \operatorname{ctg} x.$$

§ 4.5. Derivada de una función inversa

Supongamos que la función $y = f(x)$ estrictamente crece, es continua en el intervalo (a, b) y tiene derivada finita $f'(x)$, distinta de cero, en cierto punto $x \in (a, b)$. Mientras que la función inversa de f, $x = f^{-1}(y) = g(y)$, tiene también derivada en un punto correspondiente y ésta se determina según la fórmula

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \tag{1}$$

o bien,

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}. \tag{1'}$$

Demostración. Como es sabido, la función inversa $x = g(y)$ crece estrictamente y es continua en el intervalo (A, B), donde

$$A = \inf_{x \in (a,\, b)} f(x), \quad B = \sup_{x \in (a,\, b)} f(x)$$

(véase el § 3.6, el teorema 1′).

Comuniquemos al y en consideración un incremento $\Delta y \neq 0$. A este incremento le corresponde el incremento Δx de la función inversa, el cual es también distinto de cero debido a la monotonía estricta de f. Por eso

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Si ahora $\Delta y \to 0$, entonces, en vista de la continuidad de $g(y)$, el incremento Δx también $\to 0$; pero cuando $\Delta x \to 0$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x) \neq 0$, por consiguiente, existe un límite

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Con esto queda demostrada la fórmula (1).

Observación. *Si $f'(x) \neq 0$ es continua en (a, b), entonces $g'(y)$ es continua en (A, B).*

Esto se desprende de (1), donde se puede poner $x = g(y)$:

$$g'(y) = \frac{1}{f'[g(y)]}, \quad y \in (A, B).$$

Es que la función compuesta $f'[g(y)]$, formada por las funciones continuas f' y g, es también continua.

§ 4.6. Derivadas de las funciones elementales (continuación)

1. $y = a^x$. De aquí $x = \log_a y$ es una función inversa. Por ello

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\frac{1}{y \ln a}} = y \ln a = a^x \ln a, \text{ es decir,}$$

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

En particular,

$$(e^x)' = e^x, \quad (e^{-x})' = -e^{-x}.$$

2. $y = \operatorname{arcsen} x$ ($|x| < 1$, $-\pi/2 < y < \pi/2$), $x = \operatorname{sen} y$ es una función inversa. Por lo tanto

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

es decir,

$$(\operatorname{arcsen} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ante la raíz se ha puesto el signo +, puesto que $\cos y > 0$ en $(-\pi/2, \pi/2)$.

3. $(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen} x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

4. $y = \operatorname{arctg} x$, $x = \operatorname{tg} y$ es una función inversa $(-\infty < x < \infty$, $-\pi/2 < y < \pi/2)$. Entonces

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2},$$

es decir,

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

5. De un modo sumamente análogo se demuestra que

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

6. *Derivada de la función potencial* x^α ($x > 0$, α es un número real arbitrario). Tenemos

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

Ya que las funciones e^u y $\alpha \ln x$ tienen su derivada, entonces de acuerdo con el teorema sobre la derivada de una función compuesta, obtenemos

$$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha \frac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

De este, modo,

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Este resultado concuerda con la fórmula (2), § 4.3, para la derivada de la función x^n ($x \in (-\infty, \infty)$), donde n es un número natural.

7. *Función* $y = u(x)^{v(x)}$ ($u > 0$). Si $u(x)$ y $v(x)$ tienen las derivadas, la misma propiedad tiene la función

$$u^v = e^{v \ln u} \tag{1}$$

y

$$(u^v)' = e^{v \ln u}(v \ln u)' = u^v\left(\frac{v}{u}u' + v' \ln u\right). \tag{2}$$

La expresión

$$[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)} \tag{3}$$

se denomina *derivada logarítmica de la función* f.

Dado que

$$\ln u^v = v \ln u,$$

entonces, en virtud de la fórmula (3),

$$\frac{(u^v)'}{u^v} = (v \ln u)' = v' \ln u + \frac{vu'}{u},$$

de donde se deduce (2).

8. *Funciones hiperbólicas*

$$(\text{sh}\, x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{ch}\, x,$$

$$(\text{ch}\, x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{sh}\, x,$$

$$(\text{th}\, x)' = \left(\frac{\text{sh}\, x}{\text{ch}\, x}\right)' = \frac{\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x}{\text{ch}^2 x} = \frac{1}{\text{ch}^2 x},$$

$$(\text{cth}\, x)' = \left(\frac{\text{ch}\, x}{\text{sh}\, x}\right)' = \frac{\text{sh}^2 x - \text{ch}^2 x}{\text{sh}^2 x} = \frac{-1}{\text{sh}^2 x} \quad (x \neq 0).$$

9. $y = \text{Arsh}\, x$ es una función inversa de la función $x = \text{sh}\, y$. De aquí

$$(\text{Arsh}\, x)' = \frac{1}{(\text{sh}\, y)'} = \frac{1}{\text{ch}\, y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{sh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

(véase a continuación el § 4.12, ejemplo 2).

§ 4.7. Diferencial de una función

4.7.1. Funciones diferenciables

Supongamos que la función f tiene derivada en el punto (finito) x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Entonces la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ puede anotarse, para Δx suficientemente pequeños, en forma de una suma de $f'(x)$ y cierta función que se designará mediante $\varepsilon(\Delta x)$ y que posee la propiedad de que tiende a cero a la par con Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon(\Delta x) \quad (\varepsilon(\Delta x) \to 0,\ \Delta x \to 0)$$

y el incremento de f en el punto x puede ser escrito así:

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \Delta x \cdot \varepsilon(\Delta x) \quad (\varepsilon(\Delta x) \to 0,\ \Delta x \to 0)$$

o bien

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \underset{\Delta x \to 0}{o(\Delta x)}. \tag{1}$$

Es que la expresión $\underset{\Delta x \to 0}{o}(\Delta x)$ se entiende como una función de Δx tal que su razón respecto de Δx tiende a cero junto con Δx.

DEFINICIÓN. *La función f se llama diferenciable en el punto x, si su incremento Δy en el mismo punto puede ser representado en la forma*

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \underset{\Delta x \to 0}{o}(\Delta x), \tag{2}$$

donde A no depende de Δx, pero sí depende, en el caso general, de x.

TEOREMA 1. *Para que una función f sea diferenciable en el punto x, es decir, para que su incremento en el punto citado sea representado por la fórmula (2), es necesario y suficiente que la función tenga derivada finita en dicho punto. Entonces $A = f'(x)$.*

De este modo, la expresión que f tiene derivada en el punto x es sumamente equivalente a la expresión que f es diferenciable en el punto x. Por eso el proceso de búsqueda de la derivada se llama, además, *diferenciación* de la función.

Demostración del teorema 1. La suficiencia de la condición se ha demostrado más arriba: de la existencia de la derivada finita $f'(x)$ provenía la posibilidad de expresar Δy en la forma (1), donde se puede suponer que $f'(x) = A$.

Necesidad de la condición. Sea f una función diferenciable en el punto x. En este caso de (2) obtenemos (suponiendo $\Delta x \neq 0$)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{\underset{\Delta x \to 0}{o}(\Delta x)}{\Delta x} = A + \underset{\Delta x \to 0}{o}(1).$$

El límite del segundo miembro existe, para $\Delta x \to 0$, y es igual a A:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A.$$

Esto significa que existe la derivada

$$f'(x) = A.$$

4.7.2. Diferencial de una función

Supongamos que la función $y = f(x)$ es diferenciable en el punto x, o sea, para el incremento de dicha función Δy en este punto se cumple la igualdad (2). Entonces Δy es una suma de dos sumandos. El primero de ellos, $A\Delta x$, es proporcional a Δx, y en estos casos suele decirse que dicho sumando no es más que una función homogénea lineal de Δx. El segundo sumando, $\underset{\Delta x \to 0}{o}(\Delta x)$, es una infinitésima de pequeñez de orden superior en comparación con Δx. Si $A \neq 0$, el segundo sumando tiende a cero, cuando $\Delta x \to 0$, con mayor rapidez que el primero. Es por eso que el primer sumando $A\Delta x = f'(x)\,\Delta x$ se llama *término principal del incremento* Δy (¡para $\Delta x \to 0$! Véase la definición al final del § 3.10). Este sumando recibe el nombre de

diferencial de la función y se designa con el símbolo dy. Así pues, según la definición,

$$dy = df = f'(x)\,\Delta x.$$

En la fig. 47 viene expuesta la gráfica Γ de la función $y = f(x)$: T es la tangente a Γ en el punto A cuya abscisa es x; $f'(x) = \operatorname{tg}\alpha$, donde α es el ángulo formado por la tangente y el eje x;

$$dy = f'(x)\,\Delta x = \operatorname{tg}\alpha\,\Delta x = CD,$$

$$DB = \Delta y - dy = \underset{\Delta x \to 0}{o}(\Delta x).$$

Fig. 47

De este modo, *la diferencial de una función y en el punto x, correspondiente al incremento Δx, es el incremento de la ordenada de un punto dispuesto en la tangente* ($dy = CD$).

Hablando en general, $dy \neq \Delta y$, pues $\Delta y = dy + \underset{\Delta x \to 0}{o}(\Delta x)$, mientras que el segundo término de esta suma no es igual, en el caso general, a cero. La igualdad $\Delta y = A\Delta x = dy$ para x cualquiera, tiene lugar, sólo si la función $y = Ax + B$ es lineal. En particular, para $y = x$, $dy = dx = \Delta x$, es decir, *la diferencial y el incremento de una variable independiente son iguales entre sí* ($dx = \Delta x$). Por eso, la diferencial de una función arbitraria f se anota de manera ordinaria así:

$$dy = f'(x)\,dx,$$

de donde

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

o sea, *la derivada de una función f en el punto x es igual a la razón de la diferencial de la función en este punto respecto de la diferencial de la variable independiente x*. Esto explica el hecho de que la expresión dy/dx(de y respecto de x) se emplea como el símbolo para designar la derivada.

Conviene tener en cuenta que *la diferencial dx de una variable independiente no depende de x, y es igual a Δx, un incremento arbitrario del argumento x. En lo que se refiere a la diferencial dy de la función y (diferente de x), podemos decir que depende tanto de x como de dx.*

Demos a conocer las fórmulas

$$d(u \pm v) = du \pm dv, \tag{3}$$

$$d(u \cdot v) = u\,dv + v\,du, \tag{4}$$

$$d(cu) = c\,du \quad (c \text{ es una constante}), \tag{5}$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2} \quad (v \neq 0), \tag{6}$$

donde se supone que u y v son las funciones diferenciables en el punto x a examinar.

Por ejemplo, la fórmula (6) se demuestra así:

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\left(\frac{u}{v}\right)' dx=\frac{vu'\,dx-uv'\,dx}{v^2}=\frac{v\,du-u\,dv}{v^2}.$$

4.7.3. Expresión aproximada del incremento de una función Si la función $y=f(x)$ es diferenciable en el punto x, entonces, en virtud de la fórmula (1), su incremento correspondiente al incremento Δx podemos anotar del modo siguiente:

$$\Delta y = dy + \underset{\Delta x\to 0}{o}(\Delta x).$$

De aquí se deduce que la diferencial de una función puede servir, para Δx suficientemente pequeños, como buena aproximación del incremento de la función. En este sentido se escribe una igualdad aproximada

$$\Delta y \approx dy = f'(x)\,dx, \tag{7}$$

la cual es de amplio uso.

Supongamos que se pide calcular el valor de la función f en un punto x, es decir, el número $f(x)$. Pero ha aparecido la necesidad de sustituir x por su valor aproximado $x+\Delta x$:

$$x \approx x+\Delta x.$$

Surge una igualdad aproximada

$$f(x)\approx f(x+\Delta x).$$

Su error absoluto es

$$|\,\Delta y\,| = |\,f(x+\Delta x)-f(x)\,|.$$

Si la función f es diferenciable en el punto x, de la fórmula (7) se desprende que para Δx pequeños podemos considerar que el error absoluto del incremento examinado es igual aproximadamente al valor absoluto de la diferencial de la función

$$|\,\Delta y\,| \approx |\,dy\,|,$$

calculado para el incremento correspondiente Δx.

El error relativo se calcula de manera aproximada en forma siguiente:

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right| \approx \left|\frac{dy}{y}\right| \qquad (y=f(x)\neq 0).$$

EJEMPLO 1. Si se considera que

$$\sqrt[3]{8{,}001}\approx\sqrt[3]{8}=2,$$

entonces el error es igual aproximadamente a la diferencial de la función $y=x^{1/3}$ en el punto $x=8$, correspondiente al incremento

$\Delta x = 0{,}001$:

$$dy = \frac{1}{3} x^{-2/3} \Delta x = \frac{1}{3} 8^{-2/3} \cdot 0{,}001 = 1/12\,000$$

La cuestión de hasta qué grado son exactos nuestros razonamientos puede ser resuelta mediante los métodos que se estudiarán más abajo (véase el § 4.14).

§ 4.8. Otra definición de la tangente

En el caso de que la derivada $f'(x_0)$ sea finita, es posible dar otra definición de la tangente que será equivalente a la primera.

Prefijemos una recta arbitraria L, $y - y_0 = m(x - x_0)$, que pasa por el punto $A = (x_0, f(x_0))$ de la curva Γ: $y = f(x)$. Sea $B = (x, f(x))$ otro punto de la curva Γ. La distancia entre B y L en la dirección del eje y es igual a

$$\rho(x) = |f(x) - y_0 - m(x - x_0)|. \quad (1)$$

En la fig. 48 $\rho(x) = BD$.

La recta L se llama tangente a Γ en el punto A, si

$$\rho(x) \underset{x \to x_0}{=} o(x - x_0). \quad (2)$$

Si la recta L es una tangente a Γ en el punto A en el sentido de la primera definición, entonces $m = f'(x_0)$. Como f es diferenciable, tenemos

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \to x_0,$$

de donde

$$\rho(x) = |f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)| = o(x - x_0), \quad x \to x_0,$$

Fig. 48

es decir, la recta L es una tangente en el sentido de la segunda definición. En este caso (véanse (1) y (2))

$$\rho(x) = |f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)| = o(x - x_0), \quad x \to x_0,$$

o bien, que es lo mismo,

$$f(x) - f(x_0) = m(x - x_0) + o(x - x_0) \text{ para } x \to x_0.$$

Esto nos muestra que la función f es diferenciable en el punto x_0 y $m = f'(x_0)$. Pero, en tal caso L es una tangente en el sentido de la primera definición y su ecuación tiene por expresión

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Observación. De lo dicho se infiere que la curva $y = f(x)$ tiene una tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$ cuando, y sólo cuando, la función f es diferenciable en el punto x_0.

§ 4.9. Derivada de orden superior

Supongamos que en el intervalo (a, b) está dada la función f. Su derivada, si existe en el intervalo (a, b), es cierta función $f'(x)$. Se llamará dicha función *primera derivada*. Puede ocurrir que la primera derivada tenga, a su vez, derivada en el intervalo (a, b). Esta última se denomina *segunda derivada de* f, o bien *derivada de* f *segundo orden* y se designa así:

$$f''(x) = f^{(2)}(x) = (f'(x))' \text{ o } y'' = (y')'.$$

En general, se denomina *derivada de la función* f *de n-ésimo orden primera derivada de la derivada de* f *de orden* $(n - 1)$ y se designa así:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))', \text{ o bien } y^{(n)} = (y^{(n-1)})'.$$

Si se trata de cierto valor fijado de x, el símbolo $f^{(n)}(x)$ designa la derivada de f de n-ésimo orden en el punto x. Para que ésta exista, se requiere la existencia de la derivada $f^{(n-1)}$ no sólo en x, sino también en cierto entorno de x.

EJEMPLOS.

1°. $(e^x)^{(n)} = e^x$.

2°. $(a^x)' = a^x \ln a$, $(a^x)'' = a^x \ln^2 a, \ldots, (a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$.

3°. $(x^m)' = mx^{m-1}$, $(x^m)'' = m(m-1)x^{m-2}, \ldots, (x^m)^{(n)} = m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$.

Si m es natural, entonces, evidentemente

$$(x^m)^{(m)} = m! \quad \text{y} \quad (x^m)^{(n)} = 0 \quad (n > m).$$

4°. $(\operatorname{sen} x)' = \cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,

$$(\operatorname{sen} x)'' = \left[\operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]' = \operatorname{sen}\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right),$$

. . . .

$$(\operatorname{sen} x)^{(n)} = \operatorname{sen}\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

5°. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

No obstante, no es toda función ni mucho menos, para la cual se logra obtener fórmulas generales para sus n-ésimas derivadas.

Ejercicio. Por medio del método de inducción matemática, demuéstrese la fórmula (de Leibnitz) para la derivada de n-ésimo orden de un producto de dos funciones:

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)},$$

donde u y v tienen derivadas hasta el orden n inclusive,

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad 0! = 1.$$

§ 4.10. Diferencial de orden superior. La propiedad de invariación de una diferencial de primer orden

Si en el intervalo (a, b) está dada una función $y = f(x)$, se puede representarla como función compuesta mediante un número infinito de formas:

$$y = \varphi(z), \ z = \psi(x).$$

De este modo, y puede considerarse como una función de x $(y = f(x))$ y como una función de z $(y = \varphi(z))$, donde z es, a su vez, una función de x $(z = \psi(x))$.

El argumento x se llamará *independiente*, subrayando con ello que en nuestros razonamientos x no se considerará como una función de tal o cual variable. En cambio, el argumento z se denominará *dependiente* (¡de x!).

La diferencial de una función $y = f(x)$ en el punto x es, como sabemos, un producto de la derivada de f en dicho punto por la diferencial de la variable independiente:

$$dy = f'(x)\, dx.$$

Aquí dx es un número arbitrario que *no depende de x*. Esto se pone de manifiesto en lo que la derivada de dx respecto a x es igual a cero:

$$(dx)' = 0.$$

La diferencial de una función se denomina, además, *diferencial primera*.

Según la definición, se llama *diferencial segunda de una función $y = f(x)$ en el punto x diferencial de la primera diferencial en dicho punto* y se denota así:

$$d^2y = d\,(dy).$$

Para calcular la diferencial segunda conviene tomar derivada respecto a x del producto $f'(x)\, dx = dy$, considerando que dx es una constante (¡independiente de x!) y multiplicar el resultado por dx:

$$d^2y = d\,[f'(x)\, dx] = dx\, d\,[f'(x)] = f''(x)\, dx^2.$$

En general, por definición, se denomina *diferencial de n-ésimo orden de una función $y = f(x)$ primera diferencial de la diferencial de $(n - 1)$-ésimo orden de dicha función* y se denota con

$$d^ny = d\,(d^{n-1}y).$$

Es evidente que

$$d^n y = f^{(n)}(x)\, dx^n, \tag{1}$$

puesto que esta fórmula es justa para $n = 1$, y si admitimos que es justa para $n - 1$, entonces

$$d^n y = d\,[f^{(n-1)}(x)\, dx^{n-1}] = dx^{n-1} d\,[f^{(n-1)}(x)] = f^{(n)}(x)\, dx^n.$$

Por supuesto, para que exista la diferencial de n-ésimo orden de la función $y = f(x)$ en el punto x, es necesario que la función citada tenga la derivada $f^{(n)}(x)$ de n-ésimo orden en el mismo punto.

En virtud de (1) tenemos

$$y_x^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}, \tag{2}$$

es decir, *la derivada de n-ésimo orden de la función y respecto a la variable independiente x es igual al cociente de la división de la diferencial de n-esimo orden de y por* $dx^n = (dx)^n$.

En lo que sigue nos enteraremos de que la fórmula (2) no se verifica, si la variable independiente x en ella se sustituye por la variable dependiente z (véase más abajo (4)).

Hemos definido, pues, las diferenciales de primer y, en general, de orden superior de una función $y = f(x)$, donde x es *una variable independiente*. Pero la función y puede ser anotada, como ya se ha indicado más arriba, en la forma

$$y = \varphi(z),$$

donde z es una función de x ($z = \psi(x)$, $f(x) = \varphi[\psi(x)]$). Surge la cuestión, cómo se expresan las diferenciales introducidas por nosotros en el lenguaje de la variable (dependiente) z.

Para la diferencial primera esta cuestión se resuelve del modo siguiente:

$$dy = y'_x\, dx = y'_z z'_x\, dx = y'_z\,(z'_x\, dx) = y'_z\, dz.$$

Vemos que la diferencial de la función y es igual al producto de su derivada y'_z por dz:

$$dy = y'_z\, dz, \tag{3}$$

es decir, *la primera diferencial de la función y se expresa en término de una misma fórmula, independientemente de si y se considera como una función de la variable independiente x o bien de la variable dependiente z.*

La forma de la diferencial primera (véase (3)) se conserva, razón por la cual se dice que *la primera diferencial tiene forma invariante* o, en otras palabras, *posee la propiedad de invariancia.*

El asunto ya no es así, cuando se trata de las diferenciales de orden superior. Efectivamente, si consideramos y como una función de z ($y = \varphi(z)$), obtendremos (véase el § 4.7 (6))

$$d^2y = d(dy) = d[\varphi'(z)\,dz] = dz\,d(\varphi'(z)) + \\ + \varphi'(z)\,d(dz) = \varphi''(z)\,dz^2 + \varphi'(z)\,d^2z. \qquad (4)$$

En la última igualdad se ha aplicado la propiedad de invariancia de la primera diferencial, en virtud de la cual $d(\varphi'(z)) = \varphi''(z)\,dz$. Además, se ha tomado en consideración que $d(dz) = d^2z$. La magnitud d^2z no puede despreciarse en el caso general, puesto que queda definida mediante la igualdad $d^2z = \psi''(x)\,dx^2$. Su segundo miembro es igual a cero (¡para cualquier x!) sólo en el caso cuando $\psi(x)$ sea una función lineal ($\psi(x) = Ax + B$).

Vemos pues que la forma de la segunda diferencial (expresada en términos de z) no se ha conservado: al número $\varphi''(z)\,dz^2$ se ha agregado un sumando $\varphi'(z)\,d^2z$, el cual en el caso general es distinto de cero.

§ 4.11. Diferenciación de las funciones definidas paramétricamente

Supongamos que la dependencia entre y e x se expresa mediante un parámetro t:

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{array}\right\}, \quad t \in (a, b). \qquad (1)$$

Esto debe entenderse en aquel sentido que existe una función inversa de la función $x = \varphi(t)$ y puede escribirse la forma explícita de la dependencia entre y e x:

$$y = \psi[\varphi^{-1}(x)]. \qquad (2)$$

Buscaremos la derivada de y respecto a x en términos de las derivadas de x e y respecto a t. Emplearemos las designaciones y'_x, y''_x, . . ., x'_t, y'_t, donde la letra abajo indica respecto a qué variable se busca la derivada. Debido a la invariancia de la forma de la primera diferencial, $y'_x = dy/dx$. Pero, $dy = y'_t\,dt$, $dx = x'_t\,dt$. Por eso

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \quad (x'_t \neq 0). \qquad (3)$$

Para la derivada de segundo orden obtenemos

$$y''_x = \frac{d}{dx}\,y'_x = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{x'_t y''_t - y'_t x''_t}{(x'_t)^3} \qquad (4)$$

De modo análogo pueden obtenerse las fórmulas para las derivadas $y_x^{(n)}$ respecto a x de orden $n > 2$ en términos de las derivadas de x e y respecto a t.

§ 4.12. Teoremas del valor medio

Según la definición, *una función f alcanza en el punto $x = c$ un máximo (mínimo) local, si existe un entorno de este punto $U(c) = (c - \delta, c + \delta)$, en el cual se satisface la desigualdad*

$$f(c) \geqslant f(x), \ \forall x \in U(c) \tag{1}$$

$$(f(x) \geqslant f(c), \ \forall x \in U(c), \text{ (respectivamente)}. \tag{1'}$$

Un máximo o un mínimo local lleva el nombre de *extremo local.* El punto c se denomina punto de *extremo local.*

Observación 1. Si la función f es continua en el segmento $[a, b]$ y alcanza en el punto $c \in (a, b)$ un máximo o un mínimo, entonces, evidentemente, c es al mismo tiempo un punto de máximo (mínimo) local de f. Otra cosa es, cuando un máximo (un mínimo) de f en $[a, b]$ se alcanza en uno de los puntos extremales del segmento. Tal punto no será un punto de máximo (mínimo) local de f, puesto que f no está definida en su entorno completo (a la derecha de él y a la izquierda).

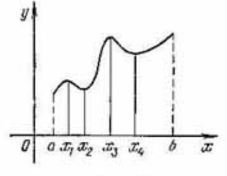


Fig. 49

En la fig. 49 está representada la gráfica de la función $y = f(x)$, continua en $[a, b]$. Los puntos x_2 y x_4 son los de mínimo local de f, mientras que los puntos x_1, x_3 son los puntos de máximo local de f. Por supuesto, podemos decir que b es un punto de máximo local unilateral de f, y a es un punto de mínimo local unilateral de f. Pero a no es un punto de mínimo local, al igual que b no es un punto de máximo local.

TEOREMA 1 (de Fermat [1])). *Si la función f tiene derivada en el punto c y alcanza en dicho punto un extremo local, entonces $f'(c) = 0$.*

Demostración. Consideraremos, para concretar, que f tiene en c un máximo local. Según la definición de la derivada, tenemos

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

Por cuanto, en nuestro caso, $f(c) \geqslant f(x)$, $\forall x \in U(c)$, para $\Delta x > 0$ suficientemente pequeños

$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leqslant 0,$$

[1]) Fermat P. (1601—1665), un matemático francés.

de donde, pasando al límite para $\Delta x \to 0$, obtendremos

$$f'(c) \leqslant 0. \tag{2}$$

En cambio, si $\Delta x < 0$, se tiene

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \geqslant 0,$$

por lo cual, pasando en esta desigualdad al límite para $\Delta x \to 0$, obtenemos como resultado

$$f'(c) \geqslant 0. \tag{3}$$

De las relaciones (2) y (3) se infiere que $f'(c) = 0$.

TEOREMA 2 (de Rolle [1]). *Si la función $y = f(x)$ es continua en $[a, b]$, diferenciable en (a, b) y,* además, $f(a) = f(b)$, *entonces existe un punto $\xi \in (a, b)$ tal que $f'(\xi) = 0$.*

Demostración. Si f es continua en $[a, b]$, entonces la derivada $f'(\xi) = 0$, cualquiera que sea $\xi \in (a, b)$.

Convengamos en considerar ahora que f no es constante en $[a, b]$. Por cuanto f es continua en $[a, b]$, existe un punto $x_1 \in [a, b]$, en el cual f alcanza su máximo en $[a, b]$ (véase el § 3.5, teorema 2) y existe otro punto $x_2 \in [a, b]$, en el que f alcanza su mínimo en $[a, b]$. Ambos puntos no pueden ser puntos extremales del segmento $[a, b]$, ya que en el caso contrario

$$\max_{x\in[a,\,b]} f(x) = \min_{x\in[a,\,b]} f(x) = f(a) = f(b)$$

y la función f sería constante en $[a, b]$. Por consiguiente, uno de los puntos x_1, x_2 pertenece al intervalo (a, b). Designémoslo con ξ. En dicho punto se alcanza un extremo local. Además, $f'(\xi)$ existe, puesto que, por hipótesis, $f'(x)$ existe para todo $x \in (a, b)$. Por ello, de acuerdo con el teorema de Fermat, $f'(\xi) = 0$.

Observación 2. El teorema de Rolle queda en vigor también para el intervalo (a, b), con tal de que se cumpla la correlación

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x).$$

Observación 3. El teorema de Rolle pierde su validez, si por lo menos en un punto de (a, b), $f'(x)$ no existe. Ejemplo: $y = |x|$ en $[-1, 1]$. En el teorema tampoco se puede sustituir la continuidad en $[a, b]$ por la continuidad en (a, b). De ejemplo sirve la función

$$y = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ x, & 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

El punto $x = 0$ es el de discontinuidad.

[1]) Rolle M. (1652—1719), un matemático francés que demostró dicho teorema para los polinomios.

Observación 4. El teorema de Rolle tiene simple significado geométrico. Cumplidas las condiciones del teorema, en la gráfica (fig. 50) de la función $y = f(x)$ existe un punto $(\xi, f(\xi))$ tal que la tangente a la curva en este punto es paralela al eje x.

TEOREMA 3 (de Cauchy). *Si las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son continuas en $[a, b]$, diferenciables en (a, b), y, además, $g'(x) \neq 0$ en (a, b), entonces existe un punto $\xi \in (a, b)$ tal que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{4}$$

Demostración. Observemos que $g(b) - g(a) \neq 0$, puesto que en el caso contrario se encontraría, de acuerdo con el teorema de Rolle, un punto ξ tal que sea $g'(\xi) = 0$, lo que no puede ser por hipótesis del teorema. Formemos una función auxiliar

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} [g(x) - g(a)].$$

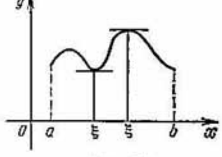


Fig. 50

Por hipótesis del teorema la función citada F es continua en $[a, b]$, diferenciable en (a, b) y $F(a) = 0$, $F(b) = 0$. Al aplicar el teorema de Rolle, llegamos a que existe un punto $\xi \in (a, b)$ en el cual $F'(\xi) = 0$. Pero

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x),$$

por lo cual, sustituyendo x por el punto ξ, obtenemos la afirmación del teorema.

Observación 5. Como es fácil de ver, en la fórmula (4) de Cauchy no es obligatorio considerar que $a < b$. Pero, en este caso, $[a, b]$ y (a, b) denotan, respectivamente, los conjuntos de puntos x, para los cuales $b \leqslant x \leqslant a$, $b < x < a$.

Cuando $g(x) = x$, obtenemos el teorema de Lagrange que aparece como corolario del teorema de Cauchy.

TEOREMA 4 (de Lagrange[1]) del valor medio). *Supongamos que la función $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$ y tiene derivada en el intervalo (a, b). Entonces existe en el intervalo (a, b) un punto c, para el cual se satisface la igualdad*

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c) \quad (a < c < b). \tag{5}$$

[1]) Lagrange J. A. (1736—1813), un matemático francés.

El teorema de Lagrange tiene el sentido geométrico muy simple, al anotarlo en la forma

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \quad (a<c<b).$$

El primer miembro de esta igualdad es la tangente del ángulo de inclinación respecto al eje x de una cuerda que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ de la gráfica de la función $y = f(x)$; el segundo miembro es la tangente del ángulo de inclinación de la línea tangente respecto a la gráfica en cierto punto intermedio de abscisa $c \in (a, b)$. El teorema de Lagrange afirma que si una curva (fig. 51) es la gráfica de una función, continua en $[a, b]$, que tiene derivada en (a, b), entonces existe en la curva mencionada tal punto, correspondiente a cierta abscisa c $(a<c<b)$ que la tangente a la curva en este punto es paralela a la cuerda que une los extremos de la curva $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

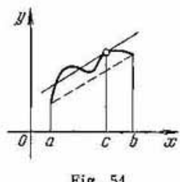


Fig. 51

La igualdad (5) recibe el nombre de *teorema (de Lagrange) del incremento finito*. El valor intermedio de c resulta cómodo escribir en la forma

$$c = a + \theta(b-a),$$

donde θ es un número que satisface las desigualdades $0<\theta<1$. Entonces la fórmula de Lagrange adquiere la forma

$$f(b)-f(a) = (b-a)f'(a+\theta(b-a)) \quad (0<\theta<1). \tag{6}$$

Es verídica, obviamente, no sólo para $a<b$, sino también para $a \geqslant b$.

TEOREMA 5. *Una función que es continua en el segmento $[a, b]$, donde $a<b$, y tiene derivada no negativa (positiva) en el intervalo (a, b) no decrece (crece estrictamente) en $[a, b]$.*

En efecto, supongamos que $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$; entonces en el segmento $[x_1, x_2]$ se cumplen las condiciones del teorema de Lagrange. Por esta razón existe en el intervalo (x_1, x_2) un punto c, para el cual

$$f(x_2)-f(x_1) = (x_2-x_1)f'(c) \quad (x_1<c<x_2).$$

Si, por hipótesis, $f' \geqslant 0$ en (a, b), tenemos $f'(c) \geqslant 0$, y

$$f(x_2)-f(x_1) \geqslant 0; \tag{7}$$

si, en cambio, $f' > 0$ en (a, b), entonces $f'(c) > 0$, y

$$f(x_2)-f(x_1) > 0. \tag{8}$$

Cualesquiera que sean x_1, x_2, donde $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$, se verifican las desigualdades (7) y (8), razón por la cual en el primer lugar f no decrece, y en el segundo, f es estrictamente creciente en el segmento $[a, b]$.

EJEMPLO 1. Volveremos al ejemplo 1 del § 4.7, donde es necesario estimar la magnitud de $\lambda = \sqrt[3]{8{,}001} - \sqrt[3]{8}$. Apliquemos la fórmula de Lagrange a la función $\psi(x) = x^{1/3}$. Tenemos

$$\lambda = \psi(8{,}001) - \psi(8) = 0{,}001 \cdot \psi'(c) =$$
$$= 0{,}001 \cdot \frac{1}{3} x^{-2/3}\big|_{x=c} = \frac{1}{3000} c^{-2/3} < \frac{1}{3000} 8^{-2/3} = \frac{1}{12000}.$$

En el ejemplo 1 del § 4.7 hemos obtenido el mismo resultado, pero ahora el último obtuvo una argumentación completa.

EJEMPLO 2 La función $y = \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ tiene la derivada continua

$$(\operatorname{sh} x)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x > 0, \ \forall x \in (-\infty, \infty),$$

y posee las propiedades

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{sh} x = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} \operatorname{sh} x = +\infty.$$

Por consiguiente, esta función crece estrictamente y es continuamente diferenciable en $(-\infty, \infty)$, y aplica el intervalo $(-\infty, \infty)$ sobre $(-\infty, \infty)$. Por esta razón tiene una función inversa, uniforme y continuamente diferenciable, que se designa así: $x = \operatorname{Arsh} y$, $y \in \in (-\infty, \infty)$.

TEOREMA 6. *Si una función tiene en el intervalo (a, b) una derivada igual a cero, será constante en (a, b).*

Efectivamente, en virtud del teorema de Lagrange tiene lugar la igualdad

$$f(x) - f(x_1) = (x - x_1) f'(c),$$

donde x_1 es un punto fijo del intervalo (a, b), x es un punto arbitrario del intervalo citado (puede disponerse a la derecha y a la izquierda de x_1) y c es un punto que depende de x_1 y x, y que se dispone entre x_1 y x. Por cuanto, según la hipótesis, $f'(x) \equiv 0$ en (a, b), entonces $f'(c) = 0$ y $f(x) = f(x_1) = C$ para todos los $x \in (a, b)$.

Hemos de notar que en los teoremas aducidos el debilitamiento de las condiciones que se imponen en ellos puede conducir a que las afirmaciones de los teoremas resulten erróneas (véanse las observaciones 1, 2 al teorema de Rolle).

DEFINICIÓN. *Diremos que la función $y = f(x)$ crece (decrece) en el punto x_0, si existe un número $\delta > 0$ tal que*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0 \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0\right) \quad \textit{para } 0 < |\Delta x| < \delta.$$

Es evidente que si la función $f(x)$ crece (decrece) en (a, b), será creciente (decreciente) en cualquier punto $x \in (a, b)$.

TEOREMA 7. *Si $f'(x_0) > 0$ (< 0), la función $y = f(x)$ crece (decrece) en el punto x_0.*

Demostración. Por cuanto $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, entonces, al prefijar $\varepsilon > 0$, se puede encontrar tal $\delta > 0$ que $f'(x_0) - \varepsilon < \frac{\Delta y}{\Delta x} < f'(x_0) + \varepsilon$, cuando $|\Delta x| < \delta$. Sea $f'(x_0) > 0$. Al tomar $\varepsilon < f'(x_0)$ obtenemos que $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ para $|\Delta x| < \delta$, es decir, la función f crece en el punto x_0.

Observación 6. Si la función f tiene derivada y no decrece en (a, b), entonces $f'(x) \geqslant 0$ en dicho intervalo. Siendo vigentes las condiciones enunciadas, resulta imposible que en algún punto $x \in (a, b)$ la derivada de f sea negativa, pues esto contradiría el teorema 7.

Si f tiene derivada y es estrictamente creciente en (a, b) y si no disponemos de otra información acerca de f, de todas formas tendremos que concluir que $f'(x) \geqslant 0$ en (a, b), puesto que una función estrictamente creciente puede tener en ciertos puntos de (a, b) una derivada nula. Tal es, por ejemplo, la función x^3 que es estrictamente creciente en $(-\infty, \infty)$ y que tiene, para $x = 0$, una derivada igual a cero.

Observación 7. Si una función crece en el punto x_0, no es creciente de modo obligatorio en cierto entorno del punto x_0.

Como ejemplo puede intervenir una función

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{x}{2} - x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0. \end{cases}$$

Es obvio que

$$F'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x}{2} - x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x} = \frac{1}{2}$$

y $F(x)$ es creciente en el punto $x = 0$. Sin embargo, esta función no es monótona, puesto que la derivada $F'(x) = \frac{1}{2} - 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}$ toma en cualquier entorno pequeño de cero tanto valores positivos, como negativos (véase el teorema 5). Para $x_k = 1/k\pi$ $(k = 1, 2, \ldots)$ la derivada es igual a $3/2$, siendo k par, y es igual a $-1/2$, si k es impar.

TEOREMA 8. *Si la función $f(x)$ es par (impar) y diferenciable en $[-a, a]$, entonces $f'(x)$ es una función impar (par).*

Demostración. Como que $f(x) \equiv f(-x)$, $\forall x \in [-a, a]$, las derivadas de los miembros izquierdo y derecho coinciden también: $f'(x) \equiv -f'(-x)$, es decir, $f'(x)$ es una función impar (la misma afirmación puede ser demostrada partiendo de la definición de derivada).

§ 4.13. Revelación de indeterminaciones

Diremos que la razón $\frac{f(x)}{g(x)}$ representa una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ cuando $x \to a$, si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. La revelación de dicha indeterminación consiste en hallar el límite $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, si existe.

TEOREMA 1. *Supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ están definidas y son diferenciables en un entorno del punto $x=a$, salvo, quizás, en el mismo punto a, y en dicho entorno $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, $g(x)$ y $g'(x) \neq 0$. Entonces, si existe $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, existe también $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ y se verifica la igualdad*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{1}$$

Demostración. Vamos a considerar que a es un número finito. (Véase más abajo la observación 3 para el caso en que $a = \infty$). Definamos adicionalmente f y g en el punto $x = a$, suponiendo $f(a) = g(a) = 0$. En este caso las funciones serán continuas en el punto a. Analicemos el segmento $[a, x]$, donde $x > a$, o bien $x < a$ (véase la observación 5 en el § 4.12). En $[a, x]$ las funciones f y g son continuas y en el intervalo (a, x) son diferenciables, por lo cual, de acuerdo con el teorema de Cauchy, existe un punto ξ tal que

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \; (\xi \in (a, x)) \text{ ó } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Cuando $x \to a$, también $\xi \to a$, razón por la cual, en vista del hipótesis del teorema, tenemos

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi\to a} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{2}$$

a condición de que el límite en el segundo miembro de la igualdad existe.

Con esto queda demostrado el teorema.

Observación 1. Si el límite en el segundo miembro de (1) no existe, puede existir el límite del primer miembro.

EJEMPLO. Como son $x \approx x$, resulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0.$$

No obstante,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)'}{(\operatorname{sen} x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x}$$

no existe.

Observación 2. Si la expresión $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ representa una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ y las funciones $f'(x)$, $g'(x)$ satisfacen las condiciones del teorema 1, entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Las igualdades mencionadas se deben entender además en el sentido de que si existe el tercer límite, existen también el segundo y el tercero.

TEOREMA 2 $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. *Supongamos que f y g están definidas y son diferenciables en un entorno del punto $x = a$, $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$, $g(x)$ y $g'(x) \neq 0$ en el entorno citado. Entonces si*

$$\exists \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \textit{ entonces } \exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

y

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Omitimos aquí la demostración de este teorema.

Observación 3. Si $a = \infty$, la sustitución $x = 1/t$ reduce el caso de $a = 0$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0} \frac{f(1/t)}{g(1/t)} = \lim_{t\to 0} \frac{f(1/t))'}{(g(1/t))'} =$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{g'(1/t)(-1/t^2)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Una regla expresada por los teoremas 1, 2, en virtud de la cual el cálculo del límite de una razón de dos funciones puede ser reducido al calculo del límite de la razón entre las derivadas de dichas funciones, lleva el nombre de *L'Hospital*, un matemático que la formuló, aunque para los casos más sencillos. Se debe decir, sin embargo, que esta regla la conocía I. Bernoulli, antes de L'Hospital [1]).

EJEMPLO 1.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0, \quad \forall \alpha > 0, \quad a > 1.$$

---

[1]) L'Hospital G. F. (1661—1704), un matemático francés. Bernoulli I. (1667—1748), un matemático suizo.

Aquí tenemos una indeterminación de la forma $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Aplicando la regla de L'Hospital k veces ($k \geqslant \alpha$, $k = \alpha$, para α natural), obtenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{cx^{\alpha-k}}{a^x (\ln a)^k} = 0.$$

EJEMPLO 2.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0, \quad \forall\alpha > 0.$$

Las funciones x^α y $\ln x$ satisfacen todas las condiciones del teorema 2, debido a lo que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

Además de las indeterminaciones examinadas se encuentran las indeterminaciones de la forma $0\cdot\infty$, 0^0, ∞^0, $\infty - \infty$, 1^∞, cuya determinación es obvia. Las indeterminaciones indicadas se reducen a las indeterminaciones $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ con ayuda de las transformaciones algebraicas.

a. *Indeterminación de la forma* $0\cdot\infty$ ($f(x)\,g(x)$, $f(x)\to 0$, $g(x)\to\infty$ para $x\to a$). Está claro que

$$f(x)\,g(x) = \frac{f}{1/g}\left(\frac{0}{0}\right) \text{ o bien } f\cdot g = \frac{g}{1/f}\left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

EJEMPLO 3.

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha \ln x = 0, \quad \forall\alpha > 0;$$

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} - \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-\alpha x^{-\alpha-1}} =$$

$$= -\frac{1}{\alpha} \lim_{x\to 0} x^\alpha = 0.$$

b. *Indeterminaciones de la forma* 1^∞, 0^0, ∞^0 se reducen, para la expresión de f^g, a la indeterminación $0\cdot\infty$. Según la definición de esta función, $f^g = e^{g \ln f}$ ($f > 0$).

Si

$$\lim_{x\to a} g \ln f = k,$$

tenemos

$$\lim_{x\to a} f^g = e^k.$$

c. *Indeterminación de la forma* $\infty - \infty$ ($f(x) - g(x)$, $f \to +\infty$, $g \to +\infty$ cuando $x \to a$). Es fácil ver que

$$f-g=\frac{1}{\frac{1}{f}}-\frac{1}{\frac{1}{g}}=\frac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{f}\cdot\frac{1}{g}}\left(\frac{0}{0}\right).$$

§ 4.14. Fórmula de Taylor [1]

Analicemos un polinomio arbitrario de n-ésimo grado:

$$P_n(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n=\sum_{k=0}^{n} b_kx^k,$$

donde, de este modo, b_k son unos números constantes, es decir, los coeficientes del polinomio. Sea x_0 un número fijo cualquiera. Suponiendo $x=(x-x_0)+x_0$, obtendremos

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} b_k[(x-x_0)+x_0]^k, \tag{1}$$

de donde, al elevar a potencias los corchetes y reducir los términos semejantes en potencias de $(x-x_0)$, obtendremos la expresión para $P_n(x)$ en la forma siguiente:

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\ldots+a_n(x-x_0)^n=\sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k, \tag{2}$$

que se denomina *desarrollo del polinomio* $P_n(x)$ *en potencias de* $(x-x_0)$. Aquí $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son los números dependientes de b_i, y x_0 son los coeficientes del desarrollo de P_n en potencia de $(x-x_0)$. Por ejemplo, $a_0=b_0+b_1x_0+\ldots+b_nx_0^n$. De (1) proviene evidentemente que $P_n(x)$ no depende, en realidad, de x_0.

Hallemos las derivadas sucesivas de $P_n(x)$:

$$\left.\begin{array}{l}
P_n'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+\ldots+na_n(x-x_0)^{n-1},\\
P_n''(x)=1\cdot 2a_2+2\cdot 3a_3(x-x_0)+\ldots+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
P_n^{(k)}(x)=1\cdot 2\ldots ka_k+\ldots+n(n-1)\ldots(n-k+1)a_n\times\\
\qquad\qquad\times(x-x_0)^{n-k},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
P_n^{(n)}(x)=1\cdot 2\ldots na_n.
\end{array}\right\} \tag{3}$$

---

[1] Taylor B. (1685—1731), un matemático inglés.

Las derivadas de orden superior a n son iguales a cero. Suponiendo en las fórmulas (2) y (3) $x = x_0$, obtenemos

$$P_n(x_0) = a_0,\quad P'_n(x_0) = a_1,\ P''_n(x_0) = 1\cdot 2a_2,\ \ldots$$
$$\ldots,\ P_n^{(k)}(x_0) = k!a_k,\ \ldots,\ P_n^{(n)}(x_0) = n!a_n$$

o bien

$$a_k = \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (k = 0, 1, \ldots, n), \tag{4}$$

donde se considera que $0! = 1$, $P_n^{(0)}(x) = P_n(x)$.

Las fórmulas (4) muestran que un mismo polinomio $P_n(x)$ de grado n puede desarrollarse en potencias de $(x - x_0)$ de un modo único, es decir, si para todos los valores de x se verifica

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{n} \beta'_k (x - x_0)^k,$$

donde β_k y β'_k son unas constantes, entonces $\beta_k = \beta'_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$. Es que tanto los números β_k, como los β'_k se calculan según una misma fórmula (4).

En virtud de (4) la fórmula (2) puede escribirse así:

$$P_n(x) = P_n(x_0) + \frac{P'_n(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{P_n^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

La fórmula (2') se denomina *fórmula de Taylor para el polinomio $P_n(x)$ en potencias de $(x - x_0)$*. Observemos que el segundo miembro de (2') de hecho no depende de x_0.

EJEMPLO 1. Sea $P_n(x) = (a + x)^n$ y $x_0 = 0$. Entonces, en virtud de (2')

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(0)}{k!} x^k,$$

donde en nuestro caso

$$P_n^{(k)}(x) = n(n-1)\ldots(n-k+1)(a+x)^{n-k},$$
$$P_n^{(k)}(0) = n(n-1)\ldots(n-k+1)\,a^{n-k},$$

y se ha obtenido la fórmula conocida para *el binomio de Newton*

$$(a+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} a^{n-k}x^k. \tag{5}$$

Examinemos ahora una función cualquiera $f(x)$ la que tiene en cierto entorno del punto x_0 derivadas continuas de todos los órdenes hasta el $(n+1)$-ésimo. Podemos componer formalmente un polinomio

$$Q_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \tag{6}$$

el cual se denomina *polinomio de Taylor de n-ésimo grado o bien n-ésimo polinomio de Taylor de la función f en potencias de* $(x-x_0)$.

El polinomio $Q_n(x)$ coincide con la función $f(x)$ en el punto x_0, pero no es igual a $f(x)$ para todos los x (siempre que $f(x)$ no sea un polinomio de grado n). Además,

$$Q_n'(x_0)=f'(x_0),\ \ldots,\ Q_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0). \tag{7}$$

Pongamos

$$f(x)=Q_n(x)+r_n(x). \tag{8}$$

La fórmula (8) *lleva el nombre de Taylor para la función* $f(x)$; $r_n(x)$ se denomina *término residual de la fórmula de Taylor* y, más detalladamente, *n-ésimo término residual de la fórmula de Taylor de la función f en potencias de* $x-x_0$. La función $r_n(x)$ muestra qué error se comete cuando $f(x)$ se sustituye por el polinomio de Taylor (6).

Hallemos la expresión para $r_n(x)$ en términos de la derivada $f^{(n+1)}(x)$.

En virtud de (7) y (8), $r_n(x_0)=r_n'(x_0)=\ldots=r_n^{(n)}(x_0)=0$. Pongamos $\varphi(x)=(x-x_0)^{n+1}$. Está claro que $\varphi(x_0)=\varphi'(x_0)=\ldots$ $\ldots=\varphi^{(n)}(x_0)=0$. Al aplicar el teorema de Cauchy a las funciones $r_n(x)$ y $\varphi(x)$, tendremos

$$\frac{r_n(x)}{\varphi(x)}=\frac{r_n(x)-r_n(x_0)}{\varphi(x)-\varphi(x_0)}=\frac{r_n'(x_1)}{\varphi'(x_1)}=$$
$$=\frac{r_n'(x_1)-r_n'(x_0)}{\varphi'(x_1)-\varphi'(x_0)}=\frac{r_n''(x_2)}{\varphi''(x_2)}=\ldots=\frac{r_n^{(n)}(x_n)}{\varphi^{(n)}(x_n)}=$$
$$=\frac{r_n^{(n)}(x_n)-r_n^{(n)}(x_0)}{\varphi^{(n)}(x_n)-\varphi^{(n)}(x_0)}=\frac{r_n^{(n+1)}(x_{n+1})}{\varphi^{(n+1)}(x_{n+1})}$$

$$(x_1\in(x_0,\ x)\ \text{y}\ x_{k+1}\in(x_0,\ x_k),\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Mas $\varphi^{(n+1)}(x)=(n+1)!$, $r_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)-0=f^{(n+1)}(x)$. Por consiguiente

$$r_n(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c), \tag{9}$$

donde $c=x_{n+1}$ es un punto que se halla comprendido entre x_0 y x

De este modo, la fórmula (8) puede escribirse en la forma

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad (8')$$

La fórmula (8′) se llama fórmula de Taylor con el término residual en *forma de Lagrange*.

Hemos demostrado un teorema de importancia.

TEOREMA 1. *Si la función f tiene en un entorno del punto x_0 una derivada continua $f^{n+1}(x)$, para cualquier x de dicho entorno se encontrará un punto $c \in (x_0, x)$ tal que $f(x)$ puede anotarse según la fórmula (8′).*

Aquí c depende de x y n.

Si el punto $x_0 = 0$, la fórmula (8) se conoce con el nombre de *fórmula de Maclaurin.*

Sabemos también otras formas del término residual de la fórmula de Taylor. Es de mucha importancia, por ejemplo, *la forma de Cauchy*

$$r_n(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0)), \qquad (10)$$

donde θ $(0<\theta<1)$ depende de n y x. La deducción de esta fórmula se ofrecerá en el § 6.5.

Reduciendo el entorno del punto x_0, obtendremos que la derivada $f^{(n+1)}(x)$ es una función continua de x en el segmento *cerrado* $[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$. Pero, en este caso, está acotada en dicho segmento:

$$|f^{(n+1)}(x)|\leqslant M_n, \quad x_0-\delta\leqslant x\leqslant x_0+\delta \qquad (11)$$

(véase el § 3.5, teorema 1). Aquí M_n es un número positivo que no depende de los x mencionados, pero depende, en general, de n. Entonces

$$|r_n(x)|\leqslant\frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}\leqslant\frac{M_n|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad (12)$$
$$|x-x_0|<\delta.$$

La desigualdad (12) puede emplearse con el fin de conseguir dos objetivos: para investigar el comportamiento de $r_n(x)$ con n fijo en el entorno del punto x_0 y para examinar el comportamiento del mismo término residual cuando $n\to\infty$.

De (12) se deduce por ejemplo, que cuando n es fijo tiene lugar la propiedad

$$r_n(x)=o((x-x_0)^n), \quad x\to x_0. \qquad (13)$$

Dicha propiedad muestra que si $r_n(x)$ dividimos por $(x-x_0)^n$, el cociente obtenido continuará tender hacia cero cuando $x\to x_0$.

En virtud de (13) de (8′) se deduce:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n). \tag{14}$$

Ésta es la *fórmula de Taylor con el término residual en el sentido de Peano* [1]). Es apta para el estudio de la función f en el entorno del punto x_0.

TEOREMA 2 (de unicidad). *Supongamos que debido a diferentes razones una misma función f resultó ser representada en el entorno del punto x_0 en la forma*

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=a_0+a_1(x-x_0)+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n),\\ f(x)&=b_0+b_1(x-x_0)+\ldots+b_n(x-x_0)^n+\underset{x\to x_0}{o}((x-x_0)^n).\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Entonces

$$a_k=b_k \quad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n). \tag{16}$$

Demostración. Si igualamos entre sí los segundos miembros de (15) y pasamos al límite para $x\to x_0$, obtendremos $a_0=b_0$. Ahora podemos realizar en esta igualdad la reducción por $(x-x_0)$ $(x\neq x_0)$ y otra vez pasar al límite para $x\to x_0$, obteniendo, como resultado, $a_1=b_1$. Continuamos este proceso hasta que se obtenga $a_n=b_n$.

EJEMPLO 2. Sabemos que

$$\sum_{k=0}^{n}x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \qquad (x\neq 1).$$

Por eso

$$\psi(x)=\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{n}x^k+\frac{x^{n+1}}{1-x}=\sum_{k=0}^{n}x^k+\underset{x\to 0}{o}(x^n). \tag{17}$$

Por otra parte, la función ψ tiene en el entorno del punto $x=0$ las derivadas de cualquier orden, por lo tanto para dicha función tiene lugar la fórmula de Taylor con el residuo en la forma de Peano

$$\psi(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\psi^{(k)}(0)}{k!}x^k+\underset{x\to 0}{o}(x^n). \tag{18}$$

Comparando las fórmulas (17) y (18), obtendremos, en vista del teorema de unicidad:

$$1=\frac{\psi^{(k)}(0)}{k!} \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n). \tag{19}$$

El párrafo que viene está dedicado al estudio del comportamiento del término residual de la fórmula de Taylor para $n\to\infty$.

---

[1]) Peano D. (1858—1932), un matemático italiano

§ 4.15. Serie de Taylor

La expresión

$$a_0 + a_1 + \dots \tag{1}$$

o también

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \tag{1'}$$

donde a_k son los números dependientes de k, lleva el nombre de *serie*. Las sumas finitas

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

se llaman *sumas parciales* de la serie (1) (o de (1')). Si existe un límite finito

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \tag{2}$$

se dice que la serie (1) converge hacia el número S y se denomina S *suma* de la serie. Al mismo tiempo se anotan para expresar lo dicho

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

Si el límite de las sumas parciales S_n (para $n \to \infty$) de la serie (1) no existe o es igual a ∞, entonces la serie (1) se llama *divergente*.

Supongamos ahora que la función f tiene derivadas de cualquier orden en el entorno del punto x_0. Para tal función puede formarse una serie de la siguiente forma:

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \tag{3}$$

o bien, en la forma más breve,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \tag{3'}$$

Para cada valor de x dicha serie puede convergir o divergir. Un conjunto de puntos x, para los cuales la serie (3) converge, lleva el nombre de *dominio de convergencia* de dicha serie. Independientemente de si es convergente o divergente la serie dada se denomina *serie de Taylor* de la función f en potencias de $x - x_0$. Si $x_0 = 0$ la serie correspondiente se llama a veces *serie de Maclaurin*.

Es de interés especial el caso en que la serie de Taylor de la función f en potencias de $(x - x_0)$ converge en cierto entorno del punto x_0, y, además, hacia la misma función $f(x)$. Si esto tiene lugar,

resulta que

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,\quad x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta),$$

o sea, la función $f(x)$ es una suma de su serie de Taylor en cierto entorno del punto x_0, para todo valor de $x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$. En este caso se dice que *la función $f(x)$ se desarrolla en la serie de Taylor en potencias de $(x-x_0)$ convergente hacia sí misma.*

TEOREMA 1. *Si la función f tiene en el segmento $[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$ derivadas de cualquier orden y el residuo de su fórmula de Taylor en el segmento mencionado tiende a cero para $n\to\infty$*

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0,\quad x\in[x_0-\delta,\ x_0+\delta],\tag{4}$$

entonces, f se desarrolla en una serie de Taylor en el mismo segmento que converge hacia la misma función f.

Demostración. Supongamos que la función f tiene en el segmento $[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$ derivadas de cualquier orden. Entonces dichas derivadas son continuas en $[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$, puesto que, si f tiene la derivada $f^{(k)}$ en $[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$, la derivada $f^{(k-1)}$ será continua en $[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$.

Por eso para nuestra función tiene sentido la fórmula de Taylor

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+r_n(x),\quad \forall n,\ x\in[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$$

En este caso, en virtud de (4),

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=\lim_{n\to\infty}[f(x)-r_n(x)]=$$
$$=f(x)-\lim_{n\to\infty}r_n(x)=f(x),$$

es decir, en tales circunstancias el polinomio de Taylor de la función $f(x)$ (en potencias de $x-x_0$) tiende, para $n\to\infty$, hacia la misma función:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k=f(x),\quad x\in[x_0-\delta,\ x_0+\delta].\tag{5}$$

Esto implica que la serie de Taylor de la función $f(x)$ converge en $[x_0-\delta,\ x_0+\delta]$ y tiene a título de su suma $f(x)$:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,\quad x\in[x_0-\delta,\ x_0+\delta].$$

El teorema queda así demostrado.

El teorema que sigue nos proporciona un criterio, simple y suficiente, de convergencia hacia cero del residuo de la fórmula de Taylor.

TEOREMA 2. *Si la función f tiene en el segmento* $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ *las derivadas de cualquier orden acotadas por un mismo número* ($|f^{(n)}(x)| \leqslant M$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $x_0 - \delta \leqslant x \leqslant x_0 + \delta$), *el residuo de su fórmula de Taylor en dicho segmento tiende, para* $n \to \infty$, *hacia cero:*

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0. \tag{6}$$

Demostración. Haciendo uso de la fórmula de Lagrange para el término residual, tenemos

$$|r_n(x)| = \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(c)| \leqslant \frac{M \cdot \delta^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{7}$$

$$(c \in (x_0, x), \ M \geqslant |f^{(n+1)}(x)|, \ \forall n \text{ y } |x - x_0| < \delta).$$

Por cuanto el segundo miembro en (7) tiende a cero para $n \to \infty$ (véase el § 2.5, (5)), tiene lugar (6).

§ 4.16. Fórmulas y series de Taylor de las funciones elementales

1. $f(x) = e^x$. Esta función es infinitamente diferenciable (tiene derivadas de cualquier orden) en $(-\infty, \infty)$. Además,

$$f^{(k)}(x) = e^x, \ f^{(k)}(0) = 1 \ (k = 0, 1, \ldots), \ f^{(n+1)}(c) = e^c.$$

La fórmula de Taylor con término residual en forma de Lagrange tiene por expresión

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + r_n(x), \quad r_n(x) = \frac{e^c x^{n+1}}{(n+1)!}, \ c \in (0, x), \tag{1}$$

donde x puede ser tanto positivo, como negativo. En el segmento $[-A, A]$, $A > 0$,

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{e^A A^{n+1}}{(n+1)!} \to 0, \quad n \to \infty \tag{2}$$

Esto prueba (véase teorema 1, del § 4.15) que la función e^x se desarrolla sobre $[-A, A]$ en una serie de Taylor en potencias de x (serie de Maclaurin), la cual converge hacia la misma función:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}. \tag{3}$$

Pero $A > 0$ es un número arbitrario, por lo cual esta igualdad se verifica en todo el eje real ($x \in (-\infty, \infty)$). En el caso dado $|f^{(k)}(x)| = |e^x| \leqslant e^A$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) en el segmento $[-A, A]$ y para obtener la igualdad (3), se podría aprovechar el teorema 2 del § 4.15.

Calculemos el número e con un error inferior a 0,001. Tenemos (véase (1)).

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + r_n(1), \tag{4}$$

donde

$$r_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!}, \quad 0 < c < 1. \tag{5}$$

Conviene elegir n tan grande que se verifique

$$r_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!} \leqslant 0{,}001 \quad (0 < c < 1).$$

Por cuanto $e^c < 3$, será suficiente con este fin resolver la desigualdad $3/(n+1)! \leqslant 0{,}001$. Dicha desigualdad se cumple para $n = 6$. Por consiguiente,

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{6!} = 2{,}718$$

con un error inferior a 0,001.

Observación. Ya que $1 < e^c < 3$ para $0 < c < 1$, entonces para $n > 2$ tenemos $e^c/(n+1) = \theta$, donde $0 < \theta < 1$. Por eso la igualdad (4) podemos escribir en la forma siguiente:

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{\theta}{n!}$$

Esta fórmula se ha utilizado (en el § 2.6, fórmula [3]) para demostrar la irracionalidad del número e.

2. $y = \operatorname{sen} x$. Esta función tiene derivada de cualquier orden y

$$|(\operatorname{sen} x)^{(k)}| = \left|\operatorname{sen}\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant 1, \quad \forall k.$$

Por eso, según el teorema 2, la función $\operatorname{sen} x$ se desarrolla en una serie de Taylor en potencias de x, la cual converge en $(-\infty, \infty)$ hacia la misma función:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

se necesita tomar en consideración que

$$(\operatorname{sen} x)^{(n)}\big|_{x=0} = \operatorname{sen}\frac{\pi n}{2} = \begin{cases} 0 & \text{para } n=2k, \\ (-1)^k & \text{para } n=2k+1. \end{cases}$$

La fórmula de Taylor en potencias de x de la función $\operatorname{sen} x$ tiene por expresión

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} - \ldots + (-1)^{\nu+1}\frac{x^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!} + r_{2\nu}(x), \qquad (6)$$

donde

$$r_{2\nu}(2x) = \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}\operatorname{sen}\left(\theta x + (2\nu+1)\frac{\pi}{2}\right), \quad 0<\theta<1.$$

De aquí se deduce que

$$r_{2\nu}(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^{2\nu})$$

y

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{\nu+1}\frac{x^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2\nu}).$$

3. $y = \cos x$. Por analogía completa podemos obtener que

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

EJEMPLO 1. Hállese $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$.

Tenemos

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3), \qquad (7)$$

razón por la cual

$$\frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3} = -\frac{1}{3!} + \frac{\underset{x\to 0}{o}(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{3!} + \underset{x\to 0}{o}(1) \to -\frac{1}{3!},$$

o sea,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

El residuo en (7) tiene en realidad la forma $\underset{x\to 0}{o}(x^4)$. Pero nos resulta suficiente $\underset{x\to 0}{o}(x^3)$. Hay que tener en cuenta que si una función de x es $\underset{x\to 0}{o}(x^4)$, será también $\underset{x\to 0}{o}(x^3)$ (¡pero no viceversa, en el caso general!)

4. *La función* $f(x) = \ln(1+x)$ está definida y es diferenciable tantas veces como se quiera cuando $x > -1$. Por tanto la fórmula de Taylor para ella puede escribirse con cualquier $n = 1, 2, \ldots$

cuando $x > -1$. Ya que

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad f^{(n)}(0)=(-1)^{n+1}(n-1)!,$$

la fórmula de Taylor por expresión

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n!}+r_n(x).$$

Empleando las formas de Lagrange y de Cauchy del término residual, se puede mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0 \text{ para } -1<x\leqslant 1.$$

Por eso la función $\ln(1+x)$ se desarrolla sobre el intervalo mencionado en una serie de Taylor en potencias de x:

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} \quad (-1<x\leqslant 1).$$

5. *La función* $f(x)=(1+x)^m$. Para esta función

$$f^{(n)}(x)=m(m-1)\ldots(m-n+1)(1+x)^{m-n},$$
$$f^{(n)}(0)=m(m-1)\ldots(m-n+1).$$

La fórmula de Taylor en potencias de x tiene la forma siguiente

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots$$
$$\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+r_n(x)$$

Se puede demostrar que para m cualquiera

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x)=0 \quad (-1<x<1).$$

Por eso para cualquier m real tiene lugar un desarrollo de la función $(1+x)^m$ en una serie de Taylor en potencias de x

$$(1+x)^m=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!}x^k \quad (-1<x<1). \qquad (8)$$

Si m es natural, la función $(1+x)^m$ es un polinomio. En este caso $r_n(x)\equiv 0$ para $n>m$ y la serie en el segundo miembro de (8) representa una suma finita, esto es, un polinomio de Taylor (véase el § 4.14).

EJEMPLO 2. Calcúlese el límite ($m \neq n$, $m \neq 0$, $n \neq 0$)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+x}-\sqrt[n]{1+x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\frac{x}{m}+o(x)-\left(1+\frac{x}{n}+o(x)\right)}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)+o(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right)+o(1)\right] = \frac{1}{m}-\frac{1}{n}.$$

EJEMPLO 3.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x(1+x)^{\alpha}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-x(1+\alpha x+o(x))}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)x^2+o(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{2}-\alpha+o(1)\right] = -\frac{1}{2}-\alpha.$$

§ 4.17. Extremo local de una función

La definición de extremo local se ha dado al principio del § 4.12. Es evidente que se le puede comunicar también la siguiente forma.

Una función $y = f(x)$ alcanza en el punto c su máximo (mínimo) local, si se puede indicar tal $\delta > 0$ que el incremento de la función Δy en el punto c satisfaga la desigualdad

$$\Delta y = f(x) - f(c) \leqslant 0, \quad \forall x \in (c-\delta,\ c+\delta)$$

($\Delta y = f(x) - f(c) \geqslant 0$, $\forall x \in (c-\delta,\ c+\delta)$, respectivamente).

Según el teorema de Fermat (véase el § 4.12), si una función f alcanza en el punto x_0 un extremo local y en dicho punto existe la derivada $f'(x_0)$, la última será igual a cero:

$$f'(x_0) = 0.$$

Por definición, el punto x_0 se denomina *estacionario para la función* f, si la derivada de f en él existe y es igual a cero ($f'(x_0) = 0$).

Si en cierto intervalo (a, b) está prefijada una función f y se pide hallar todos sus puntos de extremo local, se debe buscarlos, evidentemente y en primer lugar entre los puntos estacionarios, es decir, entre aquéllos en los que la derivada f' existe, siendo igual a cero, y, en segundo lugar, entre los puntos en los cuales f no tiene derivada, siempre que dichos puntos realmente existen. Los puntos estacionarios se hallan partiendo de la igualdad

$$f'(x) = 0, \tag{1}$$

que ha de ser resuelta. Por supuesto, no todo punto estacionario de la función f es un punto de extremo local de f.

La condición (1) es *necesaria* para que la función diferenciable f tenga extremo local en el punto x, pero no es suficiente. Por ejemplo, $x = 0$ es un punto estacionario de la función x^3, pero la función es creciente en él.

Es obvio también que no todo punto, donde f está privada de derivada, será un punto de extremo local de f.

De todas formas, si se conoce de antemano que x_0 es un punto estacionario o un punto en el que la derivada de f no existe, hacen falta los criterios de reconocimiento si x_0 es realmente un punto del extremo local y, siendo así, si será un punto de máximo local o de mínimo local.

Más abajo se dan a conocer los criterios suficientes de extremo local.

TEOREMA 1. *Sea x_0 un punto estacionario de la función f (es decir, $f'(x_0) = 0$) y supongamos que f tiene la segunda derivada continua en un entorno del punto x_0. Entonces:*

si $f''(x_0) < 0$, el punto x_0 será el de máximo local de f; en cambio, si $f''(x_0) > 0$, en x_0 tenemos un mínimo local de f.

Demostración. Desarrollemos f según la fórmula de Taylor en potencias de $(x-x_0)$, siendo $n = 1$. Como $f'(x_0) = 0$, la fórmula de Taylor de la función f en el entorno del punto x_0 tiene por expresión

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(c), \quad c \in (x_0, x). \tag{2}$$

En esta fórmula puede ser que $x \gtrless x_0$.

Sea $f''(x_0) < 0$. Por cuanto la derivada f'' es, por hipótesis, continua en el entorno del punto x_0, existe un $\delta > 0$ tal que

$$f''(x) < 0, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Mas, en este caso el término residual en la fórmula (2)

$$\frac{(x-x_0)^2}{2} f''(c) \leqslant 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

muestra lo que

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) \leqslant 0, \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

es decir, f tiene en x_0 un máximo local.

Análogamente, si $f''(x_0) > 0$, entonces $f''(x) > 0$ en cierto entorno de x_0 y $f''(c) > 0$. Por eso el término residual de la fórmula (2) en el entorno de x_0 es no negativo, y junto con él también $\Delta y = f(x) - f(x_0) \geqslant 0$, es decir f tiene en x_0 un mínimo local.

EJEMPLO 1. $y = x^2 + 5$, $y' = 2x$, $x = 0$ es un punto estacionario; $y'' = 2 > 0$ para cualquier x, por consiguiente, en el punto $x = 0$. Quiere decir, en el punto $x = 0$ hay un mínimo local.

Observación 1. Si

$$f'(x_0) = 0 \text{ y } f''(x_0) = 0, \tag{3}$$

la función f puede tener extremo y no tenerlo en el punto x_0. Por ejemplo, las funciones x^3 y x^4 satisfacen las condiciones (3) en el punto $x_0 = 0$, pero la primera de ellas no tiene extremo en dicho punto, mientras que la segunda lo tiene y este extremo es un mínimo.

TEOREMA 2. *Sea $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n)}(x_0) = 0$ y supongamos que $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$ y es continua en el entorno del punto x_0; entonces:*

si $(n+1)$ es par y $f^{(n+1)}(x_0) < 0$, en el punto x_0 f tiene un máximo local;

si $(n+1)$ es par y $f^{(n+1)}(x_0) > 0$, en el punto x_0 f tiene un mínimo local;

si $(n+1)$ es impar y $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$, entonces a ciencia cierta f no tiene en x_0 extremo local.

La demostración de este teorema se basa también en la aplicación de la fórmula de Taylor. Tenemos

$$f(x) - f(x_0) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c), \quad c \in (x_0, x) \tag{4}$$

En el caso en que $(n+1)$ es par, razonamos sumamente igual que en el caso de la fórmula (2). Sea ahora $(n+1)$ impar y sea, según se supuso, $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$. Por ser $f^{(n+1)}$ continua, en el entorno de x_0 existe un intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, en el cual $f^{(n+1)}(x)$ conserva el signo de $f^{(n+1)}(x_0)$. Si x crece en el entorno de x_0 de izquierda a derecha, entonces al pasar por x_0 cambiará de signo $(x - x_0)^{(n+1)}$, mientras que $f^{(n+1)}(c)$ conservará un mismo signo. Esto es indicio de que el segundo miembro de (4) y, por tanto, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ cambia de signo, cuando x pasa por x_0, y en x_0 resulta imposible un extremo.

TEOREMA 3. *Supongamos que la función f es continua en el segmento $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ y tiene la derivada $f'(x)$ en el intervalo $(x_0 - \delta, x_0)$ y en el $(x_0, x_0 + \delta)$. Además,*

$$f'(x) \geqslant 0 \quad (\leqslant 0) \text{ en } (x_0 - \delta, x_0), \tag{5}$$

$$f'(x) \leqslant 0 \quad (\geqslant 0) \text{ en } (x_0, x_0 + \delta). \tag{6}$$

Entonces, x_0 es un punto de máximo (mínimo) local de la función f.

La suposición de que $f'(x_0)$ existe no es obligatoria aquí.

Demostración. De la continuidad de f en el segmento $[x_0 - \delta, x_0]$ y de la propiedad (5) se deduce (véase el teorema 5 del § 4.12) que f no decrece (no crece) en dicho segmento y, por lo tanto,

$$f(x_0) - f(x) \geqslant 0 \quad (\leqslant 0) \text{ para } x \in [x_0 - \delta, x_0]. \tag{7}$$

Mientras tanto de la continuidad de f en $[x_0, x_0 + \delta]$ y de la propiedad (6) se desprende (véase el mismo teorema 5 del § 4.12)

$$f(x) - f(x_0) \leqslant 0 \ (\geqslant 0) \text{ para } x \in [x_0, x_0 + \delta]. \tag{8}$$

Si esto es así, de (7) y (8) proviene:

$$f(x) \leqslant f(x_0) \ (f(x) \geqslant f(x_0)) \text{ para } \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta],$$

y queda demostrado el teorema 3.

El teorema 3 afirma que si la primera derivada de la función f cambia de signo al pasar por el punto x_0, la función f tiene en dicho

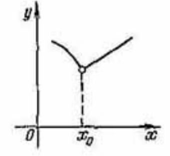


Fig. 52

Fig. 53

punto un mínimo (fig. 52), siempre que el signo menos se troca (¡al crecer x!) en el más, y un máximo (fig. 53), si el signo más se cambia en el menos. En este caso no es obligatorio que $f'(x_0)$ exista. No obstante se requiere que f sea continua en el punto x_0. Examínese la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & x < 0, \\ -x, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

EJEMPLO 2. La función $y = \frac{1}{1+x^2}$; $y' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$.

Vemos que $y' > 0$ cuando $x < 0$, $y' < 0$ cuando $x > 0$, y, además, y es continua en el punto $x = 0$, puesto que, de acuerdo con el teorema 3, la función y tiene en el punto $x = 0$ un máximo local. La función está privada de otros extremos locales.

EJEMPLO 3. La función $y = 2 - x^2 \left(1 - \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)$ $(x \neq 0)$, $y(0) = 2$, es continua en el punto $x = 0$ y tiene máximo local: $y(x) \leqslant 2 = y(0)$, $\forall x$. Sin embargo, *no se puede elegir un entorno del punto* $x = 0$ de modo tal que para $x < 0$ la función crezca en dicho punto y decrezca, para $x > 0$.

En efecto,

$$y' = -2x\left(1 - \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) - \cos\frac{1}{x} \quad (x \neq 0),$$

$$y'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{2 - x^2\left(1 - \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) - 2}{x} = -\lim_{x \to 0} x\left(1 - \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Cuando x son pequeños, el sumando $2x\left(1-\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)$ es tan pequeño como se quiera, por lo cual el signo de la derivada y' depende de $\cos\frac{1}{x}$. Cuando $x\to 0$, $\cos\frac{1}{x}$ toma los valores ± 1 tantas veces como se quiera. Resulta que, en todo entorno del punto $x=0$ la función es oscilante.

TEOREMA 4. *Supongamos que la función f satisface las condiciones $f'(x_0)=0$ y $f''(x_0)>0$ (<0). Entonces, f tiene en el punto x_0 un mínimo (máximo) local.*

Demostración. Por cuanto

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(f'x)}{x-x_0}>0,$$

llegamos a que, en virtud del teorema 2 del § 3.2, $\frac{f'(x)}{x-x_0}>0$ en un entorno suficientemente pequeño del punto x_0, es decir, $f'(x)<0$ para $x<x_0$ y $f'(x)>0$, para $x>x_0$. Teniendo presente el teorema 3, concluimos que en el punto x_0 hay un mínimo local. El caso en que $f''(x_0)<0$ se examina del modo análogo.

Observación 1. El teorema 4 contiene en sí el teorema 1 como un caso particular, puesto que no se supone en él que $f''(x)$ sea continua en el entorno del punto x_0. Se requiere sólo la existencia de $f''(x_0)$.

§ 4.18. Valores extremales de una función en un segmento

Supongamos que se pide hallar un máximo (mínimo) de la función f, continua en el segmento $[a, b]$. El hecho de que f alcanza su máximo (mínimo) sobre $[a, b]$ en cierto punto $x_0\in[a, b]$ fue demostrado en el teorema 2 del § 3.5.

Existen sólo tres posibilidades: 1) $x_0=a$, 2) $x_0=b$, 3) $x_0\in$ $\in(a, b)$.

Si $x_0\in(a, b)$, entonces, de acuerdo con lo dicho en el párrafo antecedente (4.17), el punto x_0 será un punto de extremo local y se debe buscarlo o bien entre los puntos estacionarios o bien entre los puntos, en los cuales la derivada no existe.

Si los puntos mencionados forman un conjunto finito x_m, ..., x_m, se tiene

$$\max_{x\in[a,b]} f(x)=\max\{f(a), f(b), f(x_1), \ldots, f(x_m)\}$$

$$\min_{x\in[a,b]} (f(x)=\min\{f(a), f(b), f(x_1), \ldots, f(x_m)\}\ .$$

Ha de notarse que aquí no hay necesidad de aclarar el carácter de los puntos estacionarios, si nuestro objetivo consiste sólo en encontrar un máximo (mínimo) de la función f en $[a, b]$.

EJEMPLO 1. Hállense el valor máximo y el valor mínimo de la función

$$\psi(x) = \operatorname{sen} x + \cos x \text{ en } [0, \pi].$$

Encontramos la derivada: $\psi'(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$. Igualámosla a cero:

$$\cos x - \operatorname{sen} x = 0.$$

Esta ecuación tiene en el segmento $[0, \pi]$ una única solución $x = \pi/4$. Por cuanto $\psi(0) = 1$, $\psi(\pi/4) = \sqrt{2}$, $\psi(\pi) = -1$, tenemos

$$\max_{x \in [0, \pi]} \psi(x) = \sqrt{2}, \qquad \min_{x \in [0, \pi]} \psi(x) = -1.$$

EJEMPLO 2. Supongamos que una lámpara eléctrica puede desplazarse a lo largo de la vertical OB (el eje h). En un plano perpendicular a OB tomemos un punto A (en el eje x). ¿A qué altura debe suspenderse la bombilla, para que en el punto A resulte la mejor iluminación (fig. 54)?

Solución. Dispondremos la lámpara en el punto B y sea $AB = r$, $OB = h$, $OA = a$, $\angle OAB = \varphi$. Se sabe que la iluminación I en el punto A se determina según la ley $I = c\frac{\operatorname{sen}\varphi}{r^2}$, donde c es un coeficiente de proporcionalidad. Vamos a considerar h como el argumento de la función I. Por cuanto $r^2 = h^2 + a^2$, $\operatorname{sen}\varphi = \frac{h}{r}$, resulta que $I(h) = c\frac{h}{(h^2+a^2)^{3/2}}$.

Fig. 54

Conforme al sentido del problema, $0 \leqslant h \leqslant \infty$. Hallemos el valor máximo de esta función. $I(0) = I(\infty) = 0$ [1]. Luego

$$I'(h) = c\frac{a^2 - 2h^2}{(h^2+a^2)^{5/2}} = 0 \quad \text{para} \quad h = a/\sqrt{2}.$$

Ya que $I(a/\sqrt{2} = 2c/3\sqrt{3}\,a^2 > 0$, la función $I(h)$ toma su valor máximo en el punto $h = a/\sqrt{2}$.

De este modo, la lámpara debe suspenderse a la altura de $h = a/\sqrt{2}$.

[1]) En el caso dado $I(\infty) = \lim\limits_{h \to +\infty} I(h)$

§ 4.19. Convexidad de una curva. Puntos de inflexión

Se dice que *la curva* $y = f(x)$ *gira su convexidad hacia las y positivas (negativas) en el punto* x_0, si existe un entorno de x_0 tal que para todos los puntos de este entorno una tangente a la curva en el punto x_0 (es decir, en el punto que tiene abscisa x_0) está dispuesta por arriba (por debajo) de la propia curva (en la fig. 55 la curva gira su convexidad hacia las y negativas en el punto x_1, y hacia las y positivas en el punto x_2). En lugar de las palabras «convexa hacia las y positivas (negativas)» se emplean también las expresiones «cóncava hacia las y negativas (positivas)».

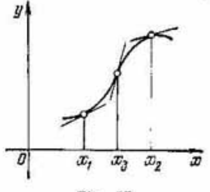


Fig. 55

Suele decirse que x_0 es un *punto de inflexión de la curva* $y = f(x)$, si al pasar x por el valor de x_0 un punto de la curva (de abscisa x) pasa de un lado de la tangente al otro lado (en la fig. 55 x_3 es precisamente un punto de inflexión). En otras palabras, existe tal $\delta > 0$, suficientemente pequeño, que para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ la curva se dispone por un lado de la tangente en el punto x_0, y para todo $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, por otro lado de la misma.

Las definiciones citadas indican las disposiciones posibles de la curva respecto de la tangente a ésta en un entorno suficientemente pequeño del punto de tangencia. Pero no se debe pensar que estas definiciones agotan todos los casos posibles de tal disposición.

Para la función

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \end{cases}$$

el eje x corta la gráfica de la función y es tangente a la misma en el punto $x = 0$, y $x = 0$ no es un punto de inflexión.

TEOREMA 1. *Si una función f tiene en el punto x_0 la segunda derivada continua y $f''(x_0) > 0$ (<0), la curva $y = f(x)$ gira su convexidad en x_0 hacia las y negativas (positivas).*

Demostración. Desarrollamos f en un entorno de $x = x_0$ según la fórmula de Taylor

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r_1(x),$$

$$r_1(x) = \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(x_0 + \theta(x - x_0)) \quad (0 < \theta < 1).$$

Escribamos la ecuación de la tangente a nuestra curva en un punto cuya abscisa es x_0:

$$Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

En tal caso la curva f excede de la tangente a la misma en el punto x_0 a una magnitud igual a

$$f(x) - Y = r_1(x).$$

De este modo, el resto $r_1(x)$ es igual a la magnitud en que la curva f supera la tangente a ella en el punto x_0. Por ser f'' continua, si $f''(x_0) > 0$, entonces también $f''(x_0 + \theta(x - x_0)) > 0$ para x pertenecientes a un entorno suficientemente pequeño del punto x_0, y por esta razón resulta evidente que también $r_1(x) > 0$ para cualquier valor de x (perteneciente al entorno mencionado) distinto de x_0. Esto significa que la gráfica de la función se dispone por arriba de la tangente y la curva gira su convexidad en x_0 hacia las y negativas.

Análogamente, si $f''(x_0) < 0$, entonces $r_1(x) < 0$ para cualquier valor de x (distinto de x_0), perteneciente a cierto entorno del punto x_0, es decir, la gráfica de la función está dispuesta por debajo de la tangente y en x_0 la curva gira su convexidad hacia las y positivas.

COROLARIO. *Si x_0 es un punto de inflexión de la curva $y = f(x)$ y en este punto existe la segunda derivada $f''(x_0)$, la última es forzosamente igual a cero ($f''(x_0) = 0$).*

Dicho corolario se usa prácticamente así: al buscar los puntos de inflexión de una curva dos veces diferenciable $y = f(x)$, se determinan éstos entre las raíces de la ecuación $f''(x) = 0$.

Una condición suficiente para la existencia del punto de inflexión de una curva la proporciona el siguiente teorema.

TEOREMA 2. *Si la función f es de tal índole que la derivada f''' es continua en x_0, y $f''(x_0) = 0$, mientras que $f'''(x_0) \neq 0$, la curva $y = f(x)$ tiene en x_0 un punto de inflexión.*

Demostración. En este caso

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r_2(x),$$

$$r_2(x) = \frac{(x-x_0)^3}{3!} f'''(x + \theta(x - x_0)).$$

Puesto que la derivada f''' es continua en x_0 y teniendo presente que $f'''(x_0) \neq 0$, deducimos que $f'''(x_0 + \theta(x - x_0))$ conserva intacto el signo en cierto entorno del punto x_0; es el mismo a la derecha y a la izquierda del punto x_0. Por otra parte, el factor $(x - x_0)^3$ cambia de signo cuando x pasa por x_0, y junto con el mencionado factor cambia de signo, cuando x pasa por x_0, la magnitud $r_2(x)$ (que es igual al exceso del punto de la curva respecto de la tangente a la misma en x_0). Esto es precisamente lo que demuestra el teorema.

Enunciemos un teorema más general:

TEOREMA 3. *Supongamos que la función f posee las siguientes propiedades:*

$$f''(x_0) = \ldots = f^{(n)}(x_0) = 0,$$

$f^{(n+1)}(x)$ es continua en x_0 y $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$.

Entonces, si n es un número impar, la curva $y = f(x)$ gira su convexidad hacia las y positivas o hacia las y negativas, según sea

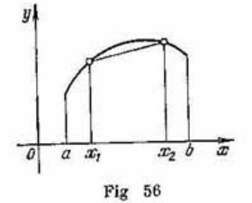


Fig 56

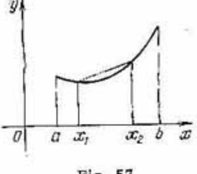


Fig. 57

$f^{(n+1)}(x_0) < 0$, ó $f^{(n+1)}(x_0) > 0$, y si n es par, x_0 será un punto de inflexión de la curva.

La demostración está basada en que tiene lugar, en las condiciones citadas, un desarrollo según la fórmula de Taylor

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)).$$

Como conclusión observemos que se dice, además, que la curva $y = f(x)$ tiene un punto de inflexión en el punto x, donde la derivada f' es igual a $+\infty$ ó a $-\infty$ (véanse las figs. 40 y 41 del § 4.2).

Por definición, una curva $y = f(x)$ se denomina *convexa* hacia *las y positivas (hacia las y negativas) en el segmento* $[a, b]$, si cualquier arco de dicha curva con extremos en los puntos de abscisas x_1, x_2 $(a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b)$ está dispuesto no más abajo (no más arriba) de la cuerda que une los extremos del arco (figs. 56 y 57).

Observación. Si f es diferenciable en $[a, b]$, la definición aducida de convexidad en un segmento es equivalente a la siguiente: una curva $y = f(x)$ se llama *convexa hacia las y positivas (hacia las y negativas) en el segmento* $[a, b]$ si es convexa hacia las y positivas (negativas) en cada punto x del intervalo (a, b).

TEOREMA 4. *Sea f una función continua en $[a, b]$ y tiene en (a, b) una derivada de segundo orden.*

Para que una curva $y = f(x)$ sea convexa hacia las y positivas (negativas) en $[a, b]$, es necesario y suficiente que se verifique la desigualdad $f''(x) \leqslant 0$ ($f''(x) \geqslant 0$) para cualquier $x \in (a, b)$.

Omitimos aquí la demostración de este teorema.

EJEMPLO 1. La función $y = \operatorname{sen} x$ tiene primera derivada continua y la segunda derivada $(\operatorname{sen} x)'' = -\operatorname{sen} x \leqslant 0$ en $[0, \pi/2]$. Por eso la cuerda OA que une los extremos del arco de la curva $y = \operatorname{sen} x$ en $[0, \pi/2)$ se dispone por debajo de la sinusoide (fig. 58). Como que la ecuación de la cuerda es $y = (2/\pi)\,x$, se ha obtenido pues la desigualdad

$$\frac{2}{\pi}x \leqslant \operatorname{sen} x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/2,$$

que es de frecuente uso en el análisis matemático.

EJEMPLO 2. $y = x^3 + 3x^2 = x^2(x+3)$; $y' = 3x^2 + 6x$, $y' = 0$ para $x = 0$, $x = -2$; $y'' = 6x + 6$, $y''(0) = 6 > 0$, $y''(-2) =$

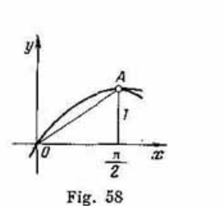


Fig. 58

Fig. 59

$= -6 < 0$, $y'' = 0$ para $x = -1$; $y''' = 6 \neq 0$. Puesto que $y'''(x) = 6 \neq 0$, en el punto $x = -1$ hay una inflexión. Luego, siendo $x > -1$, $y''(x) > 0$, cuando $x < -1$, $y''(x) < 0$. Ahora, la gráfica de la función (fig. 59) gira su convexidad hacia las y positivas en $(-\infty, -1)$ y hacia las y negativas en $(-1, \infty)$; $x = 0$ es el punto de mínimo, $x = -2$ es el punto de máximo.

§ 4.20. Asíntota de la gráfica de una función

Se dice que la recta $x = a$ es una *asíntota vertical* de la gráfica de una función continua $y = f(x)$, si por lo menos uno de los límites

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) \text{ o bien } \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$$

es igual a ∞.

Si la función $y = f(x)$ viene definida para $x > M$ $(x < M)$, dicen que la recta $Y = kx + b$ es una *asíntota oblicua* de la curva continua $y = f(x)$ cuando $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, siempre que $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, donde $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \alpha(x) = 0$ (es decir, $|f(x) - kx - b|$ es un infinitésimo cuando $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$).

EJEMPLO 1. $y = 1/x$ (fig. 60); $x = 0$ es una asíntota vertical, puesto que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty.$$

EJEMPLO 2. $y = x + \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ $(x \neq 0)$.

Por cuanto $\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$, la recta $Y = x$ (fig. 61) es una asíntota oblicua para $x \to +\infty$ (y para $x \to -\infty$).

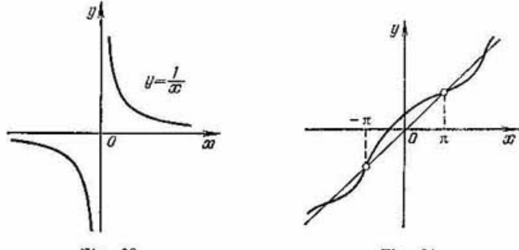


Fig. 60 Fig. 61

EJEMPLO 3. $y = \sqrt{x}$ $(x \geqslant 0)$. Está claro que $\sqrt{x} - kx - b$ no tiende a cero cuando $x \to +\infty$, cualesquiera que sean k y b, y esto significa que la función $y = \sqrt{x}$ no tiene asíntotas oblicuas.

TEOREMA. *Para que la gráfica de una función $y = f(x)$ tenga una asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, es necesario y suficiente que existan los límites finitos*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = b, \tag{1}$$

y, en este caso, la recta $Y = kx + b$ será una asíntota.

Demostración. 1) Supongamos que la función $f(x)$ tiene una asíntota oblicua para $x \to +\infty$, $Y = kx + b$. Entonces, $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, donde $\alpha(x) \to 0$, $x \to +\infty$. De aquí

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left[k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right] = k,$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to+\infty} [b + \alpha(x)] = b.$$

2) Supongamos que los límites citados en el teorema existen para $x \to +\infty$; de la segunda igualdad, por definición de un límite, tenemos

$$f(x) - kx - b = \alpha(x), \text{ donde } \alpha(x) \to 0 \text{ cuando } x \to +\infty,$$

es decir, $f(x) = kx + b + \alpha(x)$. Quiere decir, la recta $Y = kx + b$ es una asíntota oblicua para $x \to +\infty$. En el caso en que $x \to -\infty$ los razonamientos son iguales.

Si $k = 0$, la *asíntota* se llama *horizontal*.

Observación. La existencia de dos límites *finitos* (1) es esencial, pues para la función $y = \sqrt{x}$ $(x \geqslant 0)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0 = k$, pero $\lim\limits_{x \to +\infty} [\sqrt{x} - 0 \cdot x] = \infty$, es decir, $b = \infty$, y esta función no tiene asíntotas.

Se puede ofrecer también la siguiente definición equivalente de la asíntota oblicua.

Si la distancia $\rho(x)$ entre un punto A $(x, f(x))$ de la curva continua $y = f(x)$ y la recta $y = kx + b$ tiende a cero cuando $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, la recta dada se llamará asíntota oblicua de esta curva para $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$.

En efecto, por el curso de geometría analítica se conoce que la distancia desde un punto $(x, f(x))$ hasta la recta $y = kx + b$ se expresa mediante una fórmula

$$\rho(x) = |f(x) - kx - b| / \sqrt{1 + k^2},$$

de donde del hecho de que $|f(x) - kx - b| \to 0$ se deduce que $\rho(x) \to 0$, y viceversa.

EJEMPLO 4. Aclárese si tiene asíntotas la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (|x| \geqslant a, \quad a \geqslant b > 0).$$

Al resolver la ecuación dada respecto de y, tendremos

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

De aquí

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \pm \frac{b}{a} \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \pm \frac{b}{a}$$

Luego,

$$\lim_{x \to +\infty} \left[y - \left(\pm \frac{b}{a} x \right) \right] =$$

$$= \pm \frac{b}{a} \lim_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 - a^2} - x] = \pm \frac{b}{a} \lim_{x \to +\infty} \frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = 0.$$

De este modo, de conformidad con el teorema demostrado, las rectas

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

son las asíntotas de nuestra curva, con la particularidad de que el signo $+$ se refiere a la mitad derecha superior de la hipérbola, y el signo $-$, a la mitad derecha inferior de la curva.

Debido a la simetría se pone claro que estas rectas son asíntotas también para $x \to -\infty$. En este último caso el signo $+$ corresponde

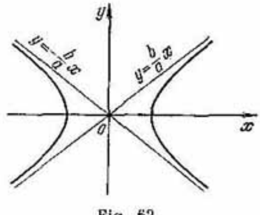


Fig. 62

a una parte de la hipérbola que se encuentra en el tercer cuadrante y el signo $-$, a otra parte de la hipérbola dispuesta en el segundo cuadrante (fig. 62).

§ 4.21. Curva continua y suave

Las ecuaciones

$$\left. \begin{array}{l} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{array} \right\} (a < t < b), \tag{1}$$

donde φ y ψ son unas funciones continuas en (a, b), definen *cierta curva continua definida con ayuda del parámetro* t, es decir, un lugar geométrico de puntos $(\varphi(t), \psi(t))$ ordenados mediante el parámetro $t \in (a, b)$. Cuando t crece, el punto $(\varphi(t), \psi(t))$ se desplaza por un plano. No está excluido que a los diferentes t (t_1 y t_2) les corresponde un mismo punto del plano: $(\varphi(t_1), \psi(t_1)) = (\varphi(t_2), \psi(t_2))$.

La curva continua (1) se denomina *suave*, si las funciones $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ tienen derivada continua en (a, b) y si se verifica la desigualdad

$$\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 > 0, \quad \forall t \in (a, b). \tag{2}$$

Designemos la curva (1) con Γ. Sea $t_0 \in (a, b)$. En virtud de la condición (2), uno de los números $\varphi'(t_0)$, $\psi'(t_0)$ es distinto de cero. Sea, para concretar, $\varphi'(t_0) \neq 0$. Entonces, por ser continua $\varphi'(t)$, existe un intervalo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, en el cual $\varphi'(t)$ conserva el signo de $\varphi'(t_0)$. Por consiguiente, $\varphi(t)$ es estrictamente monótona en $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ y, además, como ya sabemos, es continuamente

diferenciable. En tal caso la función $x = \varphi(t)$ tiene su inversa

$$t = \varphi^{-1}(x) = g(x), \quad x \in (c, d), \tag{3}$$

que es estrictamente monótona y continuamente diferenciable en cierto intervalo (c, d) el que representa un entorno del punto $x_0 = \varphi(t_0)$.

Al sustituir la expresión para t en la segunda ecuación de (1), llegamos a que el trozo γ de nuestra curva Γ, correspondiente al intervalo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, se describe por una función continuamente diferenciable (véase el § 4.4, teorema 1)

$$y = F(x) = \psi[\varphi^{-1}(x)], \quad x \in (c, d), \tag{4}$$

por lo cual en todo punto de γ existe una tangente no paralela al eje y. Es evidente que los puntos de γ se proyectan unívocamente sobre el eje x.

Si, ahora, $\psi'(t_0) \neq 0$, entonces, gracias a los razonamientos análogos, llegamos a que el trozo γ_1 de la curva Γ, correspondiente al intervalo suficientemente pequeño $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, se describe por una función continuamente diferenciable

$$x = \Phi(y) = \varphi[\psi^{-1}(y)], \quad y \in (c_1, d_1). \tag{5}$$

De aquí se deduce que también en este caso cualquier punto de γ_1 dispone de una tangente que esta vez no es paralela al eje x.

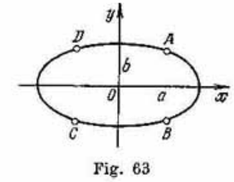


Fig. 63

Así pues, en cualquier punto de la curva suave Γ existe una tangente la cual puede ser paralela a uno de los ejes coordenados.

EJEMPLO. Las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x = a\cos t, \\ y = b \operatorname{sen} t \end{array}\right\} \quad (-\infty < t < \infty)$$

determinan en la forma paramétrica una curva que es la elipse cuyos semiejes son a y b (fig. 63).

Es una curva suave, puesto que las funciones $x = a\cos t$, $y = b\operatorname{sen} t$ tienen derivadas continuas que no son nulas simultáneamente:

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = (a\operatorname{sen} t)^2 + (b\cos t)^2 \geqslant$$
$$\geqslant b^2(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t) = b^2 > 0 \quad (0 < b \leqslant a).$$

Los puntos A, B, C, D (véase la fig. 63) dividen la elipse en cuatro trozos suaves, cada uno de los cuales se proyecta biunívocamente o bien sobre el eje x, o bien sobre el eje y.

§ 4.22. Esquema de construcción de la gráfica de una función

4.22.1. Gráfica en el sistema cartesiano de coordenadas

Si se requiere imaginar, en rasgos generales, la gráfica de la función $y = f(x)$, sirven de ayuda las siguientes indicaciones.

1. Se halla el campo Ω de valores x, donde la función f está definida.

2. Se hallan los puntos $x_1, x_2, \ldots$, donde $f'(x) = 0$, o la derivada no existe, en particular, es igual a ∞. Se calculan los valores de f en los puntos citados: $f(x_1), f(x_2), \ldots$, siempre que existen y se determina si son o no éstos los puntos de máximo o de mínimo. Si f no está definida en alguno de los puntos x_k, resulta importante saber los límites de $f(x_k - 0)$, $f(x_k + 0)$; es importante también determinar los límites

$$f(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} f(x), \, f(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} f(x)$$

si ellos tienen sentido.

3. Se divide el campo Ω mediante los puntos x_k en los intervalos (a, b), en cada uno de los cuales $f'(x) \neq 0$. Entre ellos pueden haber los intervalos infinitos (de la forma $(-\infty, c)$ o (d, ∞)).

Vamos a considerar que la derivada $f'(x)$ es continua en cada uno de estos intervalos (a, b). Entonces, $f'(x)$ en (a, b) conserva su signo. Es esencial aclarar cuál es el signo mencionado, pues sabremos si f crece o decrece en (a, b).

4. Es importante notar en cada intervalo (a, b) los puntos

$$x_{k,1}, x_{k,2}, \ldots \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

donde $f''(x) = 0$, y determinar los valores correspondientes de la función

$$f(x_{k,1}), f(x_{k,2}), \ldots .$$

En estos puntos pueden haber los puntos de inflexión de la curva $y = f(x)$. Estos puntos dividen, a su vez, (a, b) en intervalos, sobre los cuales la segunda derivada, si existe, conserva su signo.

La aclaración de signo de $f''(x)$ presta la posibilidad de conocer el carácter de convexidad de la curva (si gira su convexidad hacia las y positivas o hacia las y negativas).

5. Si es posible, se debe resolver la ecuación $f(x) = 0$ y determinar los intervalos, en los cuales f conserva su signo ($f(x) > 0$, $f(x) < 0$).

6. Se resuelve la cuestión sobre la existencia de las asíntotas, es decir, se hallan los límites

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = b$$

si tales límites existen.

Teniendo presentes dichos datos, resulta deseable formar una tabla que tenga aproximadamente la siguiente forma:

Esta tabla se ha formado para la función $y = \frac{x^2}{1+x}$.

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, \infty)$
y'	>0	0	<0	—	<0	0	>0
y	crece asíntota $y=x-1$	-4	decrece	asíntota vertical	decrece	0	decrece asíntota $y=x-1$
y''	<0	<0	<0	—	>0	>0	>0
y	convexa hacia las y positivas	máx	convexa hacia las y positivas	—	convexa hacia las y negativas	mín	convexa hacia las y negativas

Los datos de esta tabla permiten construir la gráfica de dicha función $y=f(x)$ en la forma expuesta en la fig. 64.

EJEMPLO. Constrúyase una curva, dada en la forma paramétrica:

$$\left.\begin{aligned} x &= te^t, \\ y &= te^{-t} \end{aligned}\right\} \quad (-\infty < t < \infty). \tag{1}$$

Solución. Construyamos primero la gráfica de la función $x = te^t$. Esta función está definida en todo el eje, es continua, no acotada y derivable en $(-\infty, \infty)$; $x > 0$ para $t > 0$; $x < 0$ para $t < 0$; $x = 0$ para $t = 0$. Luego, $x' = (1 + t)\, e^t$. La ecuación $x'(t) = 0$ tiene una raíz única $t = -1$. Además, es evidente que $x' > 0$ para $t > -1$; $x' < 0$ para $t < -1$. De este modo, la función $x(t)$ crece cuando $t > -1$ y decrece cuando $t < -1$. En el punto $t = -1$ la función $x(t)$ tiene un mínimo local, $x(-1) = -e^{-1}$. Es evidente que esto es, de hecho, un mínimo en $(-\infty, \infty)$.

Investiguemos el carácter de convexidad: $x'' = (2 + t)\, e^t$; $x'' > 0$ para $t > -2$; $x'' < 0$ para $t < -2$; $x''(-2) = 0$. Quiere decir, en

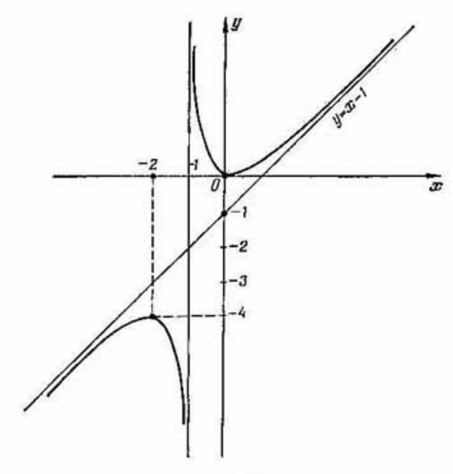


Fig. 64

$(-\infty, -2)$ la gráfica gira su convexidad hacia las y positivas, mientras que en $(-2, \infty)$ gira su convexidad hacia las y negativas, $t = -2$ es el punto de inflexión.

Luego,

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{te^t}{t} = 0, \quad \lim_{t\to-\infty} [te^t - 0] = 0,$$

es decir, $x = 0$ es una asíntota horizontal.

Al tomar en consideración los datos aducidos, podemos construir la gráfica de la función en la forma expuesta en la fig. 65a. El campo de valores de esta función es $X = [-e^{-1}, \infty]$.

De un modo sumamente análogo podemos construir la gráfica de la función $y = te^{-t}$ (fig. 65b). El campo de valores de esta función es $Y = (-\infty, e^{-1})$. En $(-\infty, 1)$ la función $y = te^{-t}$ crece estrictamente de $-\infty$ hasta $y = e^{-1}$, en el punto $t = 1$ alcanza su máximo (local en $(-\infty, \infty)$ también). En el intervalo $(1, \infty)$ es estrictamente decreciente hacia cero para $t \to +\infty$ y tiene, de este modo, una asíntota $y = 0$ cuando $t \to +\infty$. Se distingue también un punto $t = 2$, en el que la curva sufre la inflexión. En $(-\infty, 2)$ la curva

gira su convexidad hacia las y positivas y en $(2, \infty)$, hacia las y negativas.

Ahora pasamos a un problema más difícil en que se pide dibujar la gráfica de la curva (1). Designémosla mediante Γ. Las funciones que definen Γ son continuamente diferenciables tantas veces como se quiera. Nos limitaremos a usar el hecho de que dichas funciones son dos veces continuamente diferenciables. Observemos que Γ es

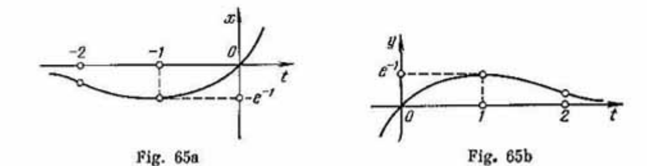


Fig. 65a Fig. 65b

una curva suave, puesto que las derivadas (respecto de t) de las funciones $x = \varphi(t) = te^t$ o $y = \psi(t) = te^{-t}$ no son nulas simultáneamente.

Designemos mediante Γ_1 y Γ_2 las ramas de Γ, en las cuales $x'_t < 0$ y $x'_t > 0$, respectivamente. De este modo (véanse las figs. 65a y 65b),

Γ_1 corresponde a la variación de $t \in (-\infty, -1)$,

Γ_2 corresponde a la variación de $t \in (-1, \infty)$.

En Γ_1 la función $x = \varphi(t)$ decrece estrictamente de $\varphi(-\infty) = 0$ a $\varphi(-1) = -e^{-1}$ y puede ser invertida, mientras que la función $y = \psi(t)$ es estrictamente creciente de $\psi(-\infty) = -\infty$ a $\psi(-1) = -e$. De aquí se deduce que la rama Γ_1 se describe por una función explícita

$$y = \psi[\varphi^{-1}(x)], \quad x \in (-e^{-1}, 0).$$

Está expresada en la fig. 66, por debajo del punto A. Cuando t crece de $-\infty$ a -1, la abscisa x del punto en Γ_1 decrece de 0 a $-e^{-1}$, mientras que la ordenada y crece de $-\infty$ a $-e$. Puesto que $x'(-1) = 0$ e $y'(-1) \neq 0$, la tangente en el punto A es paralela al eje y. Además, Γ se dispone a la derecha de la tangente: es que de la fig. 65a se ve que todos los puntos de Γ tienen la abscisa $x \geqslant -e^{-1}$.

En cualquier punto t de la curva Γ, distinto de A, es decir, para $t \neq -1$, la derivada $x'(t) \neq 0$ y

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1-t}{1+t} e^{-2t}, \tag{2}$$

$$y''_x = \frac{dy'_x}{dx} = \frac{\left(\frac{1-t}{1+t} e^{-2t}\right)'}{(1+t)e^t} = 2\frac{t^2-2}{(1+t)^3} e^{-3t}. \tag{3}$$

De donde

$$y''_x \big|_{t=\pm\sqrt{2}} = 0. \qquad (4)$$

Nos interesa ahora el valor de $t = -\sqrt{2}$, al cual corresponde el punto $B = (-\sqrt{2}\,e^{-\sqrt{2}},\ -\sqrt{2}\,e^{\sqrt{2}}) \in \Gamma_1$.

De (3) se ve que si $t < -\sqrt{2}$ (es decir, en la parte de Γ_1 que está más abajo del punto B), entonces $y''_x < 0$, y Γ_1 gira su convexidad

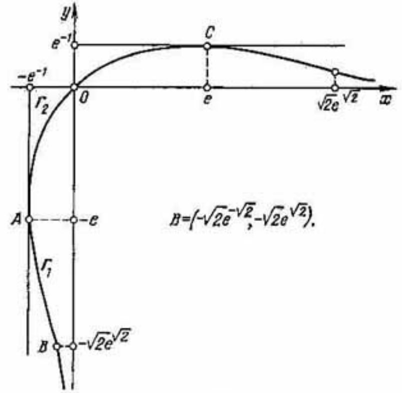


Fig. 66

hacia las y positivas. En cambio, si $-\sqrt{2} < t \leqslant -1$ (es decir, en el arco $\breve{AB}$), entonces $y''_x > 0$, y, por tanto, Γ_1 gira su convexidad hacia las y negativas. De este modo, B es el punto de inflexión de Γ_1.

Pasemos ahora a Γ_2 $(-1 < t < \infty)$. Como se ve de las figs. 65a y 65b, las funciones $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$ crecen de modo estricto en el intervalo $-1 < t < 1$, a consecuencia de lo cual podemos decir que también la función de x

$$y = \psi[\varphi^{-1}(x)] \quad (-e^{-1} < x < e)$$

es estrictamente creciente. Además, la gráfica de ella en dicho intervalo gira su convexidad hacia las y positivas (véase (3)), lo que viene expresado mediante el arco $\breve{AC} \subset \Gamma_2$. En cuanto al punto C, en él tenemos $y'_x = 0 \left(y'_x(e) = \frac{y'(1)}{x'(1)} = \frac{0}{x'(1)} = 0 \right)$, y como en dicho punto la gráfica gira su convexidad hacia las y positivas, entonces C

es un punto del máximo local de la función $y(x)$. Cuando $x > e$ (es decir, cuando $t > 1$), $x(t)$ crece, mientras que $y(t)$ decrece hacia cero. Esto es indicio de que $y(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ decreciendo. Entonces, $x(\sqrt{2}) = \sqrt{2}\, e^{\sqrt{2}}$ es el punto de inflexión de la gráfica de $y(x)$. A la izquierda de este punto la gráfica es convexa hacia las y positivas y a la derecha, hacia las y negativas (véase (3)).

4.22.2. Sistema polar de coordenadas

Definamos en un plano el rayo OL (*eje polar*) que parte del punto O el cual se denomina *polo del sistema polar de coordenadas* (fig. 67a).

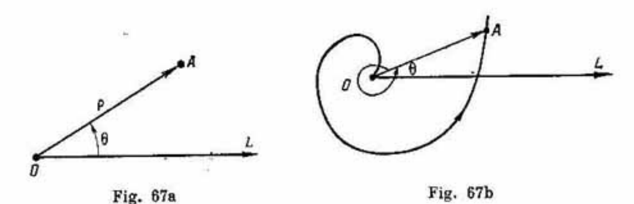


Fig. 67a Fig. 67b

La posición de un punto arbitrario A (distinto de O) del plano se determina unívocamente por un par de números (θ, ρ), denominados *coordenadas polares*, donde ρ es la distancia entre A y O, y θ es el ángulo formado por OA y OL que se expresa en radianes. Si el ángulo θ se mide en el sentido contrahorario a partir de la recta OL, se considera *positivo* y puede variar de 0 a $+\infty$. Si el ángulo θ se mide en el sentido horario, se considera *negativo* y puede variar de $-\infty$ a 0. El punto O es exclusivo. Se determina por un par de números $(\theta, 0)$, donde θ es un número arbitrario.

La dependencia funcional $\rho = f(\theta)$, dada en cierto conjunto E de valores de θ, puede interpretarse como un conjunto de puntos (θ, ρ) de un plano en el sistema polar de coordenadas, donde $\theta \in E$, $\rho = f(\theta)$.

Muchas curvas en un plano pueden ser descritas en las coordenadas polares mediante las funciones correspondientes $\rho = f(\theta)$ (uniformes o multiformes). Es claro que en el dominio de definición de la función $\rho = f(\theta)$ figuran sólo aquellos valores del ángulo θ, para los cuales $f(\theta) \geqslant 0$.

La construcción de la gráfica de $\rho = f(\theta)$ puede realizarse mediante puntos. Dado θ, trazamos un rayo que parte del punto O bajo el ángulo θ respecto del eje polar y después marcamos en dicho rayo el punto $A = (\theta, f(\theta))$ de la gráfica de la función que se halla a la distancia $\rho = f(\theta)$ desde el punto O.

La función más simple en el sistema polar de coordenadas es una constante $\rho = c$. Evidentemente, la gráfica de esta función es una circunferencia de radio c y centro en el punto O.

Otro ejemplo sencillo: $\rho = \theta$ $(0 \leqslant \theta < \infty)$ (fig. 67b). Es una espiral que se desarrolla del polo O. La flecha en la gráfica indica el sentido de movimiento de un punto de la gráfica al crecer el ángulo θ.

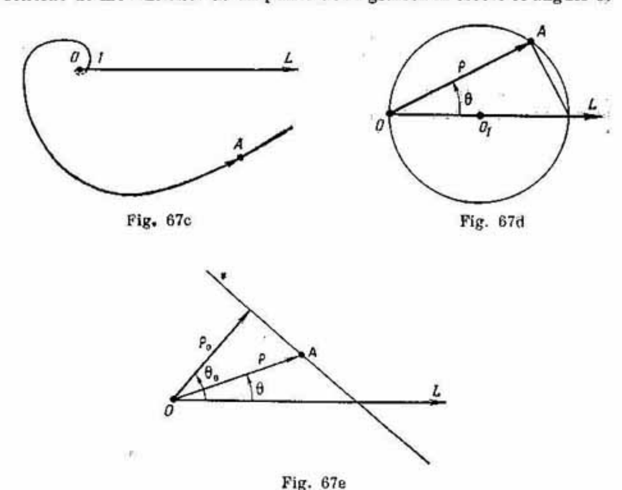


Fig. 67c

Fig. 67d

Fig. 67e

La función $\rho = 2^{\theta}$ $(-\infty < \theta < \infty)$ describe en las coordenadas polares *la espiral de Arquímedes* (fig. 67c). Observemos que en este caso $\rho \to 0$, cuando $\theta \to -\infty$.

La función $\rho = 2\cos\theta \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ describe una circunferencia de radio uno y centro en el punto $O_1 = (0, 1)$ (véase la fig. 67d).

Por fin, la función

$$\rho = \frac{\rho_0}{\cos(\theta - \theta_0)}, \quad \theta \in \left(\theta_0 - \frac{\pi}{2}, \ \theta_0 + \frac{\pi}{2}\right), \quad \rho_0 > 0,$$

describe una recta de tal índole que la perpendicular trazada sobre dicha recta desde el polo O tiene la longitud ρ_0 y forma con el eje polar el ángulo θ_0 (fig. 67e).

§ 4.23. Función vectorial. Vectores de la tangente y de la normal

Definamos en un plano el sistema rectangular de coordenadas (x, y). Las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x=x(t), \\ y=y(t) \end{array}\right\} \quad (a<t<b), \tag{1}$$

donde $x(t)$ e $y(t)$ son unas funciones continuas en el intervalo (a, b) determinan una *curva continua* Γ, o sea un conjunto geométrico de los puntos $(x(t), y(t))$ del plano, donde $t \in (a, b)$. Se dice también

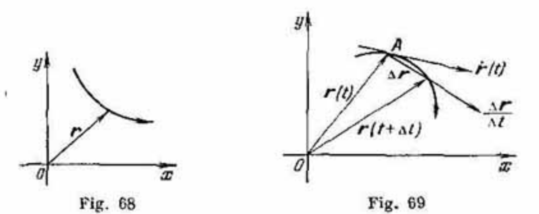


Fig. 68 Fig. 69

en este caso que la curva Γ viene prefijada por medio del parámetro t. Su ecuación puede ser dada en la forma vectorial

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} \quad (a<t<b), \tag{1'}$$

donde $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ son los versores unidades de los ejes, x, y, respectivamente, y $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ es el radio vector de un punto de Γ, correspondiente al valor t del parámetro (fig. 68).

El vector $\boldsymbol{r}(t)$ se denomina *función vectorial* (definida para $t \in (a, b)$).

Se dice con este motivo que la curva Γ es un *hodógrafo* de la función vectorial $\boldsymbol{r}(t)$, es decir, un lugar geométrico de extremos de los vectores $\boldsymbol{r}(t)$ que parten del punto nulo O.

La curva Γ se llama *suave* en (a, b), si las funciones $x(t)$ e $y(t)$ tienen derivadas continuas en (a, b) no nulas simultáneamente.

Si t recibe un incremento Δt, el vector $\boldsymbol{r}$ adquiere el incremento (fig. 69)

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t) = [x(t+\Delta t) - x(t)]\,\boldsymbol{i} + [y(t+\Delta t) - y(t)]\,\boldsymbol{j} = \Delta x\boldsymbol{i} + \Delta y\boldsymbol{j},$$

de donde, al dividir por el escalar Δt, obtendremos

$$\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\boldsymbol{i}+\frac{\Delta y}{\Delta t}\boldsymbol{j}.$$

Para una curva suave

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=x', \quad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t}=y'.$$

El vector $x'\boldsymbol{i}+y'\boldsymbol{j}$ se denomina *derivada de* $\boldsymbol{r}$ (en el punto t) y se anota así:

$$\dot{\boldsymbol{r}}=x'\boldsymbol{i}+y'\boldsymbol{j}.$$

La derivada $\dot{\boldsymbol{r}}$ puede ser definida también como un vector tal que para él se tiene

$$\left|\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}-\dot{\boldsymbol{r}}\right|\to 0, \quad \Delta t\to 0$$

En efecto,

$$\left|\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}-\dot{\boldsymbol{r}}\right|^2=\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}-x'\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}-y'\right)^2\to 0,$$
$$\Delta t\to 0.$$

Se escribe

$$\dot{\boldsymbol{r}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$$

y se dice que el vector $\dot{\boldsymbol{r}}$ es el *límite del vector* $\Delta\boldsymbol{r}/\Delta t$ *para* $\Delta t\to 0$. De la fig. 69 se ve que el vector $\dot{\boldsymbol{r}}$ está dirigido a lo largo de la tangente a Γ en el punto t hacia el lado de crecimiento de t.

El vector $\dot{\boldsymbol{r}}$ lleva el nombre de *vector de la tangente* a Γ. Su longitud es igual a

$$|\dot{\boldsymbol{r}}|=\sqrt{x'^2+y'^2}.$$

El vector unidad de la tangente es

$$\boldsymbol{\tau}=\frac{\dot{\boldsymbol{r}}}{|\dot{\boldsymbol{r}}|}=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\operatorname{sen}\alpha\boldsymbol{j} \quad (|\dot{\boldsymbol{r}}|>0),$$

$$\cos\alpha=\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}, \quad \operatorname{sen}\alpha=\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}, \tag{2}$$

donde α es el ángulo formado por $\boldsymbol{\tau}$ y la dirección positiva del eje x.

El vector unidad de la normal a Γ, es decir, el vector unidad perpendicular a $\boldsymbol{\tau}$, se determina por la ecuación

$$\boldsymbol{\nu}=(\nu_1,\ \nu_2),$$
$$\nu_1=\mp\operatorname{sen}\alpha, \quad \nu_2=\mp\cos\alpha \tag{3}$$

o bien

$$\nu_1=\mp\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}, \quad \nu_2=\pm\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}} \tag{3'}$$

El determinante

$$\begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \nu_1 & \nu_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \mp\operatorname{sen}\alpha & \mp\cos\alpha \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Los signos superiores corresponden al caso cuando el par de vectores $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu})$ está orientado igual que los ejes $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ (fig. 70), mien-

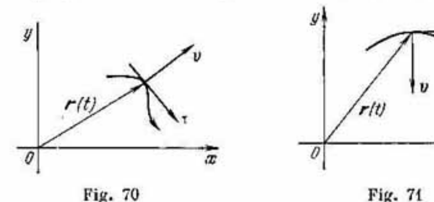


Fig. 70 Fig. 71

tras que los inferiores, al caso en que el par $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu})$ está orientado del modo contrario (fig. 71).

La segunda derivada de la función vectorial $\boldsymbol{r}(t)$ (véase (1')) se determina como el límite

$$\ddot{\boldsymbol{r}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\dot{\boldsymbol{r}}(t+\Delta t) - \dot{\boldsymbol{r}}(t)}{\Delta t} = x''(t)\,\boldsymbol{i} + y''(t)\,\boldsymbol{j}.$$

En la fig. 72 está expuesta una curva Γ; el punto A corresponde al valor t, y el punto B, al valor $t + \Delta t$. A los puntos mencionados están aplicados los vectores tangentes $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ y $\dot{\boldsymbol{r}}(t + \Delta t)$. Trasladamos el segundo vector de un modo tal que esté aplicado al punto A. En la figura vemos designada la diferencia $\Delta\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{r}}(t + \Delta t) - \dot{\boldsymbol{r}}(t)$, como también el vector $\Delta\dot{\boldsymbol{r}}/\Delta t$, orientado igual que $\Delta\dot{\boldsymbol{r}}$. Por fin, está marcado el vector límite $\ddot{\boldsymbol{r}} = \ddot{\boldsymbol{r}}(t)$. *El vector* $\ddot{\boldsymbol{r}}$ *está dirigido hacia el lado en que gira su concavidad la curva* Γ. El sentido cabal de estas palabras es: *el vector* $\ddot{\boldsymbol{r}}$ *forma un ángulo agudo con el vector* $\boldsymbol{\nu}$ *de la normal a* Γ, *dirigida hacia el lado en que gira su concavidad la curva* Γ.

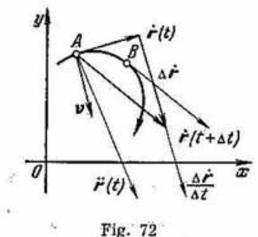


Fig. 72

EJEMPLO. En la forma vectorial la ecuación de una elipse (véase § 4.21) tiene por expresión

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}a\cos t + \boldsymbol{j}b\operatorname{sen} t \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Correspondientemente, el vector de la tangente es

$$\dot{\mathbf{r}} = -\mathbf{i}a \operatorname{sen} t + \mathbf{j}b \cos t,$$

y el vector de la normal

$$\mathbf{n} = \mp \mathbf{i}b \cos t \mp \mathbf{j}\, a \operatorname{sen} t.$$

En el caso dado $\mathbf{n}$ no es, en general, un vector unidad.

La función vectorial $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ puede ser desarrollada en un entorno del punto t_0 según la fórmula de Taylor (o en una serie vectorial de Taylor). Sea

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j},$$

donde $x(t)$ e $y(t)$ tienen un número suficiente de derivadas en el entorno del punto t_0. Entonces, desarrollando estas funciones de acuerdo con la fórmula de Taylor, tenemos

$$x(t) = x(t_0) + \frac{x'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \ldots + \frac{x^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n + R_n(t), \qquad (4)$$

$$y(t) = y(t_0) + \frac{y'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \ldots + \frac{y^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n + \overline{R}_n(t), \qquad (5)$$

donde $R_n(t)$, $\overline{R}_n(t)$ son los términos residuales en alguna de las formas conocidas (de Lagrange, de Cauchy, etc). Multiplicando (4) por $\mathbf{i}$, y (5) por $\mathbf{j}$, y sumando los resultados, obtendremos la fórmula de Taylor para la función vectorial $\mathbf{r}(t)$:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \frac{\mathbf{r}'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \ldots + \frac{\mathbf{r}^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n + \mathbf{r}_n(t),$$

donde el resto

$$\mathbf{r}_n(t) = R_n(t)\,\mathbf{i} + \overline{R}_n(t)\,\mathbf{j}.$$

Ha de notarse que si los restos $R_n(t)$ y $\overline{R}_n(t)$ se anotan en la forma de Lagrange o en la de Cauchy, las $(n+1)$—ésimas derivadas de las funciones $x(t)$ e $y(t)$ que figuran en ellos, se calculan, en el caso general, en los puntos distintos.

Capítulo 5

Integrales indefinidas

§ 5.1. Integral indefinida. Tabla de integrales

En el capítulo antecedente hemos introducido el concepto de derivada y aprendimos a encontrar derivada de las funciones elementales. Aquí se resuelve el problema inverso, a saber: conocida la derivada $f'(x)$ de la función $f(x)$, conviene hallar la propia función $f(x)$.

Desde el punto de vista mecánico esto significa que según la velocidad conocida de movimiento de un punto material, se requiere restablecer la ley de su movimiento.

Definición. *Una función $F(x)$ se denomina primitiva para la función $f(x)$ en el intervalo (a, b), si $F(x)$ es diferenciable en (a, b) y $F'(x)\ f(x)$.*

De un modo análogo podemos definir también el concepto de primitiva en el segmento $[a, b]$, pero en los puntos a y b se deben examinar las derivadas unilaterales.

EJEMPLO 1. $F(x) = \sqrt{x}$ es una primitiva para la función

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ en } (0, \infty), \text{ puesto que } (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

EJEMPLO 2. $F(x) = \operatorname{sen} 2x$ es una primitiva para la función $f(x) = 2\cos 2x$ en $(-\infty, \infty)$, puesto que $(\operatorname{sen} 2x)' = 2\cos 2x$.

TEOREMA 1. *Si $F(x)$ es una primitiva para la función $f(x)$ en (a, b), entonces $F(x) + C$ es también una primitiva, donde C es un número constante cualquiera.*

Demostración. Tenemos $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$.

TEOREMA 2. *Si $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son dos primitivas para $f(x)$ en (a, b), entonces $F_1(x) - F_2(x)$ K C en (a, b), donde C es una constante.*

Demostración. Por hipótesis, $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$. Formemos una función $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Es evidente que

$$\Phi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0, \qquad \forall x \in (a, b)$$

De aquí concluimos, de acuerdo con el teorema conocido (véase el teorema 6 del § 4.12), que $\Phi(x) \equiv C$, es decir, $F_1(x) - F_2(x) = C$, lo que se trataba de demostrar.

De este modo, de los teoremas 1 y 2 se deduce que si $F(x)$ es una primitiva para $f(x)$ en (a, b), cualquier otra primitiva $\Phi(x)$

para $f(x)$ en (a, b) tiene por expresión

$$\Phi(x) = F(x) + C, \qquad (1)$$

donde C es una constante (fig. 73).

DEFINICIÓN. *Una primitiva arbitraria para* $f(x)$ *en* (a, b) *lleva el nombre de integral indefinida* de la función $f(x)$ y se denota con el símbolo

$$\int f(x)\,dx. \qquad (2)$$

El signo $\int$ se llama *integral*; $f(x)\,dx$, *elemento de integración* o *integrando*: $f(x)$, *función subintegral.*

Si $F(x)$ es una de las primitivas para $f(x)$, entonces, de conformidad con lo dicho,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \qquad (3)$$

donde C es una constante adecuadamente elegida.

Fig. 73

La operación en que se busca una integral indefinida se llamará *integración* de la función $f(x)$.

Observemos que si $F(x)$ es una primitiva para la función $f(x)$, el integrando $f(x)\,dx = F'(x)\,dx = dF(x)$ será la diferencial de la primitiva $F(x)$.

Más abajo se demostrará que (véase el § 6.3) *si* $f(x)$ *es continua en* (a, b), *existe para ella una primitiva en* (a, b) *y, por consiguiente, una integral indefinida.*

Anotemos una serie de propiedades de la integral indefinida que se infieren de su definición:

1°. $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$. En efecto, $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, de donde

$$d\int f(x)\,dx = d(F(x) + C) = dF(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

2°. $\int dF(x) = F(x) + C$, es decir, $\int$ y d son también recíprocamente reducibles, pero se debe añadir cierta constante C a $F(x)$. Tenemos $\int dF(x) = \int F'(x)\,dx =$ (por definición) $= F(x) + C$.

3°. $\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx + C$, donde A es un número

constante, C es una constante.

4°. $\int [f(x)+g(x)]\,dx=\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx+C$,

donde C es una constante.

En efecto,

$$\left(\int f(x)\,dx+\int g(x)\,dx\right)'=\left(\int f(x)\,dx\right)'+\left(\int g(x)\,dx\right)'=$$
$$=\text{por definición}=f(x)+g(x).$$

Por otra parte,

$$\left(\int [f(x)+g(x)]\,dx\right)'=\text{por definición}=f(x)+g(x).$$

De este modo, la función $\int f\,dx+\int g\,dx$ y la función $\int [f+g]\,dx$ son las primitivas para una misma función $f+g$. Mas, en este caso se diferencian en cierta constante C, lo que precisamente está escrito en la igualdad 4°.

5°. Si $F(x)$ es una primitiva para $f(x)$, entonces

$$\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

Efectivamente,

$$\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]'=\frac{1}{a}\cdot aF'(ax+b)=f(ax+b).$$

Demos a conocer la tabla de integrales que proviene de las fórmulas principales del cálculo diferencial.

1. $\int 0\cdot dx=C$.

2. $\int x^{\alpha}\,dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\quad \forall\alpha\neq-1$.

3. $\int x^{-1}\,dx=\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$, en un intervalo que no contiene $x=0$.

4. $\int a^{x}\,dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+C\ (0<a,\ a\neq1)$, $\int e^{x}\,dx=e^{x}+C$.

5. $\int \operatorname{sen} x\,dx=-\cos x+C$, $\int \cos x\,dx=\operatorname{sen} x+C$.

6. $\int\frac{dx}{\cos^{2}x}=\operatorname{tg}x+C$, $\int\frac{dx}{\operatorname{sen}^{2}x}=-\operatorname{ctg}x+C$ en un intervalo, donde la función subintegral es continua.

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C. \end{cases} \quad (-1<x<1).$

8. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C, \end{cases}$

9. $\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C, \quad \int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C.$

10. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{tgh} x + C, \ \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{ctgh} x + C \quad (x \neq 0).$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln|x+\sqrt{x^2+1}| + C = \operatorname{Arsh} x + C,$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C = \operatorname{Arcch} x + C. \quad (|x|>1).$

12. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C \quad (|x| \neq 1).$

En cada igualdad a la izquierda figura una función primitiva arbitraria (pero bien definida) para la función subintegral correspondiente, mientras que a la derecha, una primitiva concreta a la que se añade una constante C tal que se cumpla la igualdad entre dichas dos funciones primitivas.

Demostremos la fórmula 3. Por cuanto, para $x \neq 0$, $|x|' = \operatorname{sign} x$ y $x \operatorname{sign} x = |x|$, entonces

$$(\ln|x| + C)' = \frac{1}{|x|}(|x|)' = \frac{\operatorname{sign} x}{|x|} = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0),$$

y la fórmula 3 está demostrada.

Demostremos en adición la fórmula 11:

$$(\ln|x+\sqrt{x^2+1}|+C)' = \frac{\operatorname{sign}(x+\sqrt{x^2+1})}{|x+\sqrt{x^2+1}|}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) =$$

$$= \frac{(x+\sqrt{x^2+1})\operatorname{sign}(x+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}\,|x+\sqrt{x^2+1}|} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},$$

y la fórmula 11 está demostrada.

Por otra parte, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{Arsenh} x + C$, por lo tanto, de acuerdo con el teorema 2, $\operatorname{Arsenh} x = \ln|x+\sqrt{x^2+1}| + C$. Pero, como $\operatorname{Arsenh} 0 = 0$, se tiene $\ln|x+\sqrt{x^2+1}| = \operatorname{Arsenh} x$ (véase el § 4.6, p. 9).

Aplicando la propiedad 5°, podemos escribir una tabla más compleja de integrales. Por ejemplo:

$$\int \operatorname{sen}(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C.$$

Observemos que si una operación de diferenciación de las funciones elementales conduce de nuevo a unas funciones que son también elementales, la operación de integración ya puede conducir a las funciones no elementales, es decir, a las funciones las cuales no se expresan a través de un número finito de operaciones aritméticas y superposiciones de las funciones elementales.

Por ejemplo, se ha demostrado que las siguientes integrales no son integrables en funciones elementales:

$\int e^{-x^2}\,dx$, integral de Poisson,

$\int \cos x^2\,dx$, $\int \operatorname{sen} x^2\,dx$, integrales de Fresnel,

$\int \frac{dx}{\ln x}$, logaritmo integral,

$\int \frac{\cos x}{x}\,dx$, coseno integral,

$\int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$, seno integral.

Las integrales citadas, aunque existen, no son funciones elementales. Hay otros métodos de su cálculo. Por ejemplo, el seno integral puede ser representado en forma de una serie infinita de potencias (véase el § 4.16)

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = C + x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} + \ldots .$$

§ 5.2. Métodos de integración

Un papel fundamental en el cálculo integral lo desempeña la fórmula de cambio de variables (o integración por sustitución)

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt + C = \int f(\varphi(t))\,d\varphi(t) + C. \qquad (1)$$

En dicha fórmula se supone que $x = \varphi(t)$ es una función continuamente diferenciable (que tiene derivada continua) en cierto intervalo de variación de t, y $f(x)$ es una función continua en el intervalo correspondiente (segmento) del eje x. La primera igualdad en (1) afirma que el primer miembro de ella es idénticamente igual al segundo, si se hace (después de integrar) la sustitución $x = \varphi(t)$ y si se elige una constante adecuada C. Demostremos esta afirmación. A la izquierda en (1) figura una función que es la primitiva de $f(x)$. Su derivada respecto de t es igual a

$$\frac{d}{dt}\int f(x)\,dx = \frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right)\frac{dx}{dt} = f(\varphi(t))\,\varphi'(t).$$

Por consiguiente, si se introduce en esta función la sustitución $x=\varphi(t)$, se obtendrá una primitiva de la función $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. La integral a la derecha es, por definición, cierta primitiva de $f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Pero, dos primitivas para una misma función difieren en cierta constante C, lo que precisamente está escrito en forma de la primera igualdad en (1). En lo que se refiere a la segunda igualdad, ésta lleva un carácter formal: nos convengamos simplemente en escribir

$$\int F(t)\varphi'(t)\,dt=\int F(t)\,d\varphi(t). \tag{2}$$

Por ejemplo,

$$\int e^{x^2}x\,dx=\frac{1}{2}\int e^{x^2}2x\,dx+C=\frac{1}{2}\int e^{x^2}\,dx^2+C=$$
$$=\frac{1}{2}\int e^{u}\,du+C_1=\frac{1}{2}e^{u}+C_2=\frac{1}{2}e^{x^2}+C_2\quad (u=x^2). \tag{3}$$

La primera igualdad está escrita en virtud de 3° del § 5.1; la segunda, en virtud de (2); la tercera, en virtud de (1) (la constante ha cambiado) y la cuarta, en virtud de la fórmula de la tabla (la variable ha cambiado). No obstante, en la práctica de los cálculos no se escribe la constante C en los términos que contienen la integral indefinida, por lo cual la cadena (3) se simplifica:

$$\int e^{x^2}x\,dx=\frac{1}{2}\int e^{x^2}2x\,dx=\frac{1}{2}\int e^{x^2}\,dx^2=\frac{1}{2}e^{x^2}+C,$$

donde las igualdades evidentes tercera y cuarta están omitidas.

He aquí un ejemplo más: $I=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$, $a>0$. La integral de tal género está ausente en la tabla. Si ponemos $x=a\operatorname{sen}t$, tenemos $\sqrt{a^2-x^2}=a\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}=a\cos t$, y $dx=a\cos t\,dt$. Por consiguiente,

$$I=\int a\cos t\,a\cos t\,dt=a^2\int\cos^2 t\,dt=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=$$
$$=\frac{a^2t}{2}+\frac{a^2}{4}\operatorname{sen}2t+C.$$

Pero $t=\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}$, por lo cual

$$I=\frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}+\frac{a^2}{2}\operatorname{sen}t\cos t+C=\frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}+$$
$$+\frac{a^2}{2}\frac{x}{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}+C=\frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

Así pues,

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\operatorname{arcsen}\frac{x}{a}+C.$$

Indiquemos unos ejemplos más, los cuales de todas formas nos harán falta en la teoría de integración de las fracciones racionales:

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m} = \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^m} = \frac{1}{(x-a)^{m-1}(1-m)} + C \quad (m \neq 1); \tag{4}$$

$$\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{d(x-a)}{x-a} = \ln|x-a| + C; \tag{5}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d(x/a)}{1+(x/a)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2a}(\ln|x-a| - \ln|x+a|) + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dx}{(x+(p/2))^2} =$$

$$= \int \frac{d(x+(p/2))}{(x+(p/2))^2} = -\frac{1}{x+(p/2)} + C \quad \left(q - \frac{p^2}{4} = 0\right);$$

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dx}{(x+(p/2))^2 + (q-(p^2/4))} =$$

$$= \int \frac{d(x+(p/2))}{(x+(p/2))^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x+(p/2)}{a}\right)}{1+\left(\frac{x+(p/2)}{a}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x+(p/2)}{a} + C \quad \left(q - \frac{p^2}{4} = a^2,\ a > 0\right); \tag{6}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{d(x+(p/2))}{(x+(p/2))^2 - a^2} =$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+(p/2)-a}{x+(p/2)+a}\right| + C \quad \left(q - \frac{p^2}{4} = -a^2,\ a > 0\right);$$

$$\int \frac{(2x+p)\,dx}{x^2+px+q} = \int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} = \ln|x^2+px+q| + C;$$

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+(2B/A)}{x^2+px+q}\,dx = \frac{A}{2}\int \frac{(2x+p)\,dx}{x^2+px+q} +$$

$$+ \frac{A}{2}\int \frac{(2B/A)-p}{x^2+px+q}\,dx = \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + D\int \frac{dx}{x^2+px+q}, \tag{7}$$

$$\left(A \neq 0,\ D = \frac{A}{2}\left(\frac{2B}{A} - p\right)\right) \qquad \text{(luego véase (6))}.$$

Para la teoría de integración de las fracciones racionales resulta importante que el cálculo de las integrales del tipo (4)—(7), donde a, A, B, p, q son constantes, conduce a las funciones elementales (racionales, ln y arctg).

Pasemos a la *fórmula de integración por partes:*

$$\int uv'\,dx = uv - \int vu'\,dx + C \tag{8}$$

o bien, que es lo mismo,

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du + C.$$

Puesto que en el segundo miembro de (8) figura una integral indefinida, la constante C se omite corrientemente.

En la fórmula dada se supone que $u(x)$ y $v(x)$ son las funciones continuamente diferenciables. La validez de la fórmula (8) se desprende de que las derivadas de los miembros primero y segundo son:

$$uv' = (uv)' - vu'.$$

Con ayuda de la fórmula (8) el cálculo de la integral $\int u\,dv$ se reduce al cálculo de la integral $\int v\,du$. El cálculo mediante la fórmula (8) lleva el nombre de *integración por partes.*

EJEMPLO 1. Calcúlese $\int x \ln x\,dx$. Pongamos

$$u(x) = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x},$$
$$x\,dx = dv, \quad v = \int dv = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}.$$

Entonces,

$$\int x \ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

EJEMPLO 2. Calcúlense las integrales $I = \int e^{ax} \operatorname{sen} bx\,dx$, $I_1 = \int e^{ax}\cos bx\,dx$, donde a y b son unos números constantes. En el caso dado el integrando puede ser representado en forma de un producto de $u(x)$ y $dv(x)$ de dos modos: $u = e^{ax}$, $dv = \operatorname{sen} bx\,dx$, o bien $u = \operatorname{sen} bx$, $dv = e^{ax}\,dx$.

Así pues, supongamos que

$$u = e^{ax}, \quad du = ae^{ax}\,dx,$$
$$\operatorname{sen} bx\,dx = dv, \quad v = -\frac{\cos bx}{b}.$$

Entonces, de acuerdo con la regla de integración por partes, tenemos

$$I = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b}I_1. \tag{9}$$

Apliquemos de nuevo el método de integración por partes a la integral I_1, suponiendo $u = e^{ax}$, $dv = \cos bx\, dx$. Resulta

$$I_1 = \frac{1}{b} e^{ax} \operatorname{sen} bx - \frac{a}{b} I. \tag{10}$$

De (9) y (10) se obtiene un sistema para determinar I e I_1

$$\left.\begin{aligned} I - \frac{a}{b} I_1 &= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx, \\ \frac{a}{b} I + I_1 &= \frac{1}{b} e^{ax} \operatorname{sen} bx. \end{aligned}\right\}$$

Resolviendo este sistema, obtendremos

$$I = \frac{a \operatorname{sen} bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C, \quad I_1 = \frac{b \operatorname{sen} bx + a \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C.$$

EJEMPLO 3. Calcúlese la integral $I = \int \operatorname{arcsen} x\, dx$.

Suponiendo $u = \operatorname{arcsen} x$, $dv = dx$, obtenemos

$$I = x \operatorname{arcsen} x - \int \frac{x\, dx}{\sqrt{1 - x^2}} = x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1 - x^2} + C.$$

EJEMPLO 4. Mostremos un ejemplo más, el cual nos hará falta para la teoría de integración de las funciones racionales. Sea $k > 1$ natural y sea $a > 0$; entonces

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{k-1}} = a^2 \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^k} + \frac{1}{2} \int \frac{x \cdot 2x\, dx}{(x^2 + a^2)^k} =$$
$$= \left(u = x,\ dv = \frac{2x\, dx}{(x^2 + a^2)^k}\right) = a^2 \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^k} +$$
$$+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{x}{(1 - k)(x^2 + a^2)^{k-1}} - \frac{1}{1 - k} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{k-1}} \right\},$$

de donde

$$a^2 \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^k} = \frac{x}{2(k - 1)(x^2 + a^2)^{k-1}} + \frac{2k - 3}{2(k - 1)} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{k-1}}.$$

Ahora (si $k > 2$) podemos aplicar a la integral en el segundo miembro el mismo proceso que reduce en una unidad el exponente de la potencia en el denominador de la fracción subintegral. Al fin y al cabo llegaremos a una integral de $(x^2 + a^2)^{-1}$ (que conduce a arctg).

De este modo, para $q - (p^2/4) = a^2 > 0$ y k natural, la integral

$$\int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^k} = \int \frac{du}{(u^2 + a^2)^k} + C \quad \left(u = x + \frac{p}{2}\right) \tag{11}$$

se calcula en funciones elementales.

EJEMPLO 5. Calcúlense las integrales

$$\int P_n(x) \begin{Bmatrix} e^{bx} \\ \cos bx \\ \operatorname{sen} bx \end{Bmatrix} dx,$$

donde $P_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ es un polinomio algebraico de grado n.

Estas integrales se calculan aplicando n veces el método de integración por partes y suponiendo sucesivamente $u = P_n(x)$, luego $u = P'_n(x)$, ... Las integrales que se obtendrán irán simplificándose, puesto que la derivada del polinomio algebraico $P_n(x)$ será también un polinomio algebraico de grado en una unidad inferior.

Ya que el carácter de la primitiva para las funciones en consideración se adivina con facilidad, dichas integrales pueden calcularse mediante el así llamado *método de coeficientes indeterminados.*

Por ejemplo, para $\int P_n(x) e^{bx} dx$ la primitiva tiene por expresión $Q_n(x) e^{bx} + C$, donde $Q_n(x) = b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0$, y $b_0, \ldots, b_n$ son algunos coeficientes desconocidos por ahora. Estos coeficientes se determinan a partir de la condición de que

$$(Q_n(x) e^{bx} + C)' = P_n(x) e^{bx}, \text{ o bien } Q'_n(x) + bQ_n(x) = \\ = P_n(x).$$

Igualando entre sí los coeficientes de las potencias iguales de x, hallamos todos los números $b_0, \ldots, b_n$. Este procedimiento se denomina *método de coeficientes indeterminados.* Hemos usado aquí el hecho de que dos polinomios son iguales cuando, y sólo cuando, lo son los coeficientes de las potencias correspondientes de x (véase el § 4.14, el teorema 2).

Ilustremos lo dicho con un ejemplo concreto:

$$\int (x^2 + 1) e^x dx = (ax^2 + bx + c) e^x + C.$$

En el caso dado

$$P_2(x) = x^2 + 1, \quad Q_2(x) = ax^2 + bx + c,$$

donde han de hallarse los coeficientes a, b, c. Tenemos

$$(Q_2(x) e^x)' = [ax^2 + (2a + b) x + b + c] e^x = (x^2 + 1) e^x,$$

de donde $ax^2 + (2a + b) x + b + c = x^2 + 1$. Por cuanto esta igualdad debe verificarse para todos los x, los coeficientes de las potencias iguales de x en los miembros primero y segundo son iguales entre sí (§ 4.14, (15)): $a = 1$, $2a + b = 0$, $b + c = 1$. De este modo,

$$\int (x^2 + 1) e^x dx = (x^2 - 2x + 3) e^x + C.$$

§ 5.3. Números complejos

Se llaman *números complejos* las expresiones

$$z = a + bi = a + ib,$$

donde a, b son unos números reales, mientras que i es un símbolo especial; además, para los números complejos $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ están introducidos el concepto de igualdad y las operaciones aritméticas según las reglas siguientes:

1) $z_1 = z_2$ cuando, y sólo cuando, $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$; $a + 0i = a$, $0 + bi = bi$, $1 \cdot i = i$.

2) $z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + i\,(b_1 \pm b_2)$.

3) $z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i\,(b_1a_2 + a_1b_2)$.

4) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\,\dfrac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$ $(a_2^2 + b_2^2 \neq 0)$.

De 1) y 3) se deduce que

$$i^2 = -1.$$

Las operaciones de adición y multiplicación introducidas de esta manera poseen las propiedades de conmutatividad ($z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $z_1z_2 = z_2z_1$), asociatividad ($(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, $(z_1z_2)\,z_3 = z_1\,(z_2z_3)$), distributividad ($(z_1 + z_2)\,z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$).

Se puede decir, además, que con los números complejos podemos operar sumamente igual que con las expresiones literales en el álgebra (a lo que nos hemos acostumbrado), pero en el primer caso las operaciones se simplifican debido a que $i^2 = -1$.

De la propiedad de que $a + 0i = a$ se deduce que un conjunto de números complejos contiene en sí, como su parte integrante, un conjunto de todos los números reales. En este caso es fácil ver que la aplicación de las operaciones aritméticas 2), 3), 4) a las expresiones $z_1 = a_1 + 0i$, $z_2 = a_2 + 0i$ conduce a $a_1 \pm a_2 \pm 0i = a_1 \pm a_2$, $a_1a_2 + 0i = a_1a_2$, $\dfrac{a_1}{a_2} + 0i = \dfrac{a_1}{a_2}$ $(a_2 \neq 0)$, respectivamente.

El número $\bar{z} = a - ib$ se llama *conjugado con el número complejo z*. Un número real $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ lleva el nombre de *módulo del número complejo z*. Evidentemente, $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.

Si el número complejo $z = a + ib$ se interpreta como un punto (un vector) $M\,(a, b)$ en el plano xOy, resulta que $|z|$ es igual a la distancia entre el punto $M\,(a, b)$ y el origen de coordenadas (fig. 74).

Al introducir en el plano las coordenadas polares (ρ, φ), tenemos

$$\begin{aligned} a &= \rho \cos\varphi = |z| \cos\varphi, \\ b &= \rho \operatorname{sen}\varphi = |z| \operatorname{sen}\varphi \end{aligned} \qquad (|z| > 0). \tag{1}$$

Debido a esto podemos escribir el número complejo z en la forma

$$z = \rho (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi), \tag{2}$$

donde ρ es el módulo del número z, y φ es un ángulo (en radianes) formado por el vector $\overrightarrow{OM}$ y la dirección positiva del eje x. Este ángulo se denomina, además, *argumento del número complejo* z y se denota con el símbolo: $\varphi = \arg z$ $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$.

Es obvio que $\varphi = \arg z$ será una función uniforme de $z \neq 0$. Se introduce también una función multiforme (la letra mayúscula *a* en la expresión «*argumento de z*»)

$$\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$$
$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

la cual proporciona todos los valores de φ, para los cuales se satisfacen dos igualdades (1) con $z \neq 0$ prefijado.

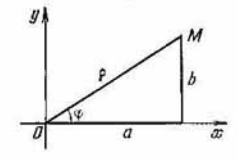


Fig. 74

El número $z = 0$ es el único, para el cual no tiene sentido su argumento, pero, en cambio, se puede definirlo como un número cuyo módulo es igual a cero ($|z| = 0$).

La expresión $\arg z$ (*a* minúscula) se llama, además, *argumento en la forma reducida*. A veces resulta conveniente tomar por argumento en la forma reducida un ángulo perteneciente al otro semiintervalo $[a, a + 2\pi)$ de longitud 2π, por ejemplo, a $[-\pi, \pi)$.

Los números a y b se llaman partes *real* e *imaginaria* de z y se designan mediante los símbolos $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$. De este modo,

$$z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z.$$

Si $z = x + iy$, el conjunto de puntos z en el plano xOy que satisfacen la igualdad $|z| = R$ $(\sqrt{x^2 + y^2} = R)$ será una circunferencia de radio R y centro en el origen de coordenadas.

Por definición,

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi \quad (-\infty < \varphi < \infty). \tag{3}$$

Es evidente que $e^{i\varphi}$ es una función compleja (que toma los valores complejos) del argumento real φ. Está claro que $e^{i\varphi}$ es una función periódica del período 2π: $e^{i(\varphi + 2\pi)} = e^{i\varphi}$.

Por cuanto $|e^{i\varphi}| = \sqrt{\cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi} = 1$, entonces, si φ varía continuamente en el semiintervalo $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, el punto $e^{i\varphi}$ describe continuamente una circunferencia de radio 1 y centro en el punto $z = 0$.

Son válidas las desigualdades

$$e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} = e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2}, \quad e^{-i\varphi} = \frac{1}{e^{i\varphi}}. \tag{4}$$

En efecto,

$$e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = \cos(\varphi_1+\varphi_2) + i \operatorname{sen}(\varphi_1+\varphi_2) =$$
$$= (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \operatorname{sen}\varphi_1 \operatorname{sen}\varphi_2) +$$
$$+ i(\operatorname{sen}\varphi_1 \cos\varphi_2 + \operatorname{sen}\varphi_2 \cos\varphi_1) =$$
$$= (\cos\varphi_1 + i \operatorname{sen}\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i \operatorname{sen}\varphi_1) = e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2},$$

$$\frac{1}{e^{i\varphi}} = \frac{1}{\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi} = \cos\varphi - i\operatorname{sen}\varphi = \cos(-\varphi) +$$
$$+ i \operatorname{sen}(-\varphi) = e^{-i\varphi}.$$

Para una variable compleja arbitraria $z = x + iy$ la función e^z se determina con ayuda de la igualdad

$$e^z = e^x e^{iy}, \quad z \neq 0.$$

De aquí, en virtud de (3)

$$e^z = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y). \tag{5}$$

Teniendo presentes (2), (3), todo número complejo z podemos representar en la forma

$$z = \rho e^{i\varphi} \quad (\rho \geqslant 0), \tag{6}$$

donde el número no negativo $\rho = |z|$ es, para z dado, único, y para $\rho > 0$ el ángulo

$$\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$$

queda definido con la exactitud de hasta $2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$)

Las expresiones (2) y (6) se denominan *formas trigonométrica* y *exponencial*, respectivamente, *del número complejo* z.

Demos a conocer los ejemplos de números complejos escritos en la forma exponencial (considerando $\varphi = \arg z$):

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4},$$
$$i = 0 + 1 \cdot i = e^{i\pi/2}, \quad 1 = e^{0i}, \quad -1 = e^{\pi i}.$$

De las igualdades (3), (4) obtenemos con facilidad la fórmula de Moivre

$$(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)^n = e^{in\varphi} = \cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi. \tag{7}$$

Es lícita también la igualdad

$$z_1 z_2 = |z_1|\,|z_2|\, e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$

es decir, al multiplicar los números complejos, sus módulos se multiplican y los argumentos se suman, independientemente de la forma en que ellos aparecen: en la forma reducida o no reducida.

La operación de construcción de un número complejo conjugado posee las siguientes propiedades sencillas:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$
$$(z_2 \neq 0). \tag{8}$$

Efectivamente,

$$\overline{(a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i)} = \overline{(a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2) i} =$$
$$= (a_1 \pm a_2) - i (b_1 \pm b_2) = (a_1 - b_1 i) \pm (a_2 - b_2 i) =$$
$$= \overline{(a_1 + b_1 i)} \pm \overline{(a_2 + b_2 i)};$$

y luego, como

$$\overline{\rho e^{i\varphi}} = \overline{\rho (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)} = \rho (\cos \varphi - i \operatorname{sen} \varphi) = \rho e^{-i\varphi},$$

entonces

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{\rho_1 e^{i\varphi_1} \rho_2 e^{i\varphi_2}} = \overline{\rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}} =$$
$$= \rho_1 \rho_2 e^{-i(\varphi_1 + \varphi_2)} = \rho_1 e^{-i\varphi_1} \rho_2 e^{-i\varphi_2} =$$
$$= \overline{\rho_1 e^{i\varphi_1}} \cdot \overline{\rho_2 e^{i\varphi_2}} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

La demostración análoga subsiste también en el caso de un cociente.

Analicemos un problema sobre el cálculo de una raíz de n-ésimo grado del número $a = \rho e^{i\theta}$ $(\rho > 0)$. Se pide, de este modo, hallar todos los números $b = re^{i\varphi}$ tales que sea $b^n = a$. Pero, en este caso, $r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\theta}$ $(r, \rho > 0)$ y, a consecuencia de que la representación de un número complejo en la forma exponencial es única, $\rho = r^n$, $n\varphi = \theta + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. De la primera igualdad se deduce que $r = \sqrt[n]{\rho}$ (r es el valor aritmético de la raíz de n-ésimo grado del número positivo ρ). De la segunda igualdad se infiere que $\varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$.

Puesto que la función $e^{i\varphi}$ es periódica del período 2π, los valores de φ que dan las raíces esencialmente diferentes de n-ésimo grado de a corresponden sólo a n valores de k:

$$\varphi_k = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{9}$$

A los demás k enteros les corresponden los valores de φ distintos de uno de los valores (9) en una magnitud múltiple de 2π.

Hemos demostrado que un número complejo $a \neq 0$ tiene n (y sólo n) raíces de grado n, que se anotan según la fórmula

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\varphi_k} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

donde φ_k se determinan por las igualdades (9).

EJEMPLOS:

1°. $\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{e^{0i}}=e^{\left(\frac{0}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)i}$ $(k=0,\ 1,\ 2)$.

2°. $\sqrt[3]{i}=\sqrt[3]{e^{i\frac{\pi}{2}}}=e^{\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)i}$ $(k=0,\ 1,\ 2)$.

3°. $\sqrt[6]{1+i}=\sqrt[12]{2}\sqrt[6]{e^{i\frac{\pi}{4}}}=\sqrt[12]{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{24}+\frac{2k\pi}{6}\right)}$,

$k=(0,\ 1,\ \ldots,\ 5)$.

4°. $\sqrt{-1}=\sqrt{e^{i\pi}}=e^{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{2}\right)i}=\pm i$ $(k=0,\ 1)$.

§ 5.4. Teoría de polinomio de n-ésimo orden

Se denomina polinomio de n-ésimo orden una función del tipo

$$Q_n(z)=a_0+a_1z+\ .\ \ .\ .+a_nz^n=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k, \tag{1}$$

donde a_k son los coeficientes constantes reales o complejos, y z es una variable, en general, compleja, la cual puede tomar cualesquiera valores complejos ($z=x+iy$) o bien, en el lenguaje geométrico, z puede representar cualquier punto de un plano complejo.

A cada punto z de un plano complejo se le asigna, con ayuda de la fórmula (1), un número $Q_n(z)$ que es, en el caso general, complejo. En adelante vamos a considerar que $a_n\neq 0$. Si $Q_n(a)=0$, el número a se llamará *raíz* o *cero del polinomio* $Q_n(z)$.

Razonando de la misma manera que al principio del § 4.14, donde se ha analizado el polinomio de una variable real, podemos mostrar que cualquiera que sea el número complejo z_0, el polinomio $Q_n(z)$ se desarrolla en potencias de $z-z_0$, y, además, de un modo único, o sea, se representa en la forma

$$Q_n(z)=\sum_{k=0}^{n}b_k(z-z_0)^k,$$

donde b_k son unos números constantes y, hablando en general, complejos. Es obvio que $Q_n(z_0)=b_0$. De aquí se deduce que para que el punto z_0 sea una raíz del polinomio Q_n, es necesario y suficiente que el coeficiente nulo b_0 del desarrollo de Q_n en potencias de $z-z_0$ sea igual a cero ($b_0=0$). Pero si $b_0=0$, entonces Q_n puede ser representado en la forma

$$Q_n(z)=(z-z_0)\,Q_{n-1}(z),\qquad \forall z, \tag{2}$$

donde Q_{n-1} es cierto polinomio de grado $n-1$. Viceversa, si Q_n puede representarse en la forma (2), en otras palabras, si $Q_n(z)$ puede dividirse por $z-z_0$ sin resto, entonces, evidentemente, z_0 es una raíz de Q_n.

Hemos demostrado el teorema:

TEOREMA DE BEZOUT. *Para que el polinomio $Q_n(z)$ tenga una raíz (compleja) z_0, es necesario y suficiente que dicho polinomio se divida por $z-z_0$, es decir, que pueda ser representado en forma del producto (2), donde Q_{n-1} es cierto polinomio de grado $n-1$.*

Sea z_0 una raíz de Q_n, y, de este modo, tiene lugar la representación (2). Si, en este caso, $Q_{n-1}(z_0)\neq 0$, entonces, a base del teorema de Bezout aplicado a Q_{n-1}, el polinomio $Q_{n-1}(z)$ no se divide por $z-z_0$, mientras que $Q_n(z)$, aunque sí se divide por $z-z_0$, no se divide, sin embargo, por $(z-z_0)^2$. En este caso se dice que z_0 es *una raíz simple (cero)* del polinomio Q_n. Supongamos ahora que $Q_{n-1}(z_0)=0$; entonces, de acuerdo con el teorema de Bezout aplicado a $Q_{n-1}(z)$, el polinomio $Q_{n-1}(z)$ se divide por $z-z_0$, y obtenemos la igualdad $Q_n(z)=(z-z_0)^2\,Q_{n-2}(z)$, donde $Q_{n-2}(z)$ es un polinomio de grado $n-2$. Si $Q_{n-2}(z_0)\neq 0$, $Q_n(z)$ se divide por $(z-z_0)^2$, pero no se divide por $(z-z_0)^3$, y el número z_0 se denomina raíz (cero) de multiplicidad 2. En el caso general, para cierto $s\leqslant n$ natural tiene lugar

$$Q_n(z)=(z-z_0)^s\,Q_{n-s}(z),\qquad Q_{n-s}(z_0)\neq 0,$$

donde $Q_{n-s}(z)$ es un polinomio de grado $n-s$, y en tal caso se dice que z_0 es *una raíz (cero) del polinomio Q_n de multiplicidad s.*

Abajo se enuncia un teorema sobre la existencia de una raíz compleja del polinomio.

TEOREMA BÁSICO. *Todo polinomio de n-ésimo grado tiene por lo menos una raíz compleja (cero).*

Omitimos aquí la demostración de este teorema, del cual se deduce un corolario de importancia.

Corolario. *Un polinomio de n-ésimo grado Q_n cuyo coeficiente mayor es distinto de cero ($a_n\neq 0$) tiene n raíces complejas con sus multiplicidades correspondientes*, en otras *palabras*, *$Q_n(z)$ se representa en forma de un producto*

$$Q_n(z)=a_n(z-z_1)^{p_1}(z-z_2)^{p_2}\dots(z-z_l)^{p_l},\qquad (3)$$

$$p_1+p_2+\dots+p_l=n,$$

donde $z_1,\dots,z_l$ son diferentes raíces de Q_n cuyas multiplicidades son $p_1,\dots,p_l$, respectivamente.

Demostración. De conformidad con el teorema básico, el polinomio Q_n tiene por lo menos una raíz. Designémosla con z_1, y su multiplicidad, con p_1. De este modo,

$$Q_n(z)=(z-z_1)^{p_1}\,Q_{n-p_1}(z),\quad Q_{n-p_1}(z_1)\neq 0.$$

Si $n - p_1 = 0$, es decir, si $p_1 = n$, entonces necesariamente $Q_{n-p_1}(z) = a_n$, y el teorema queda demostrado. En este caso $Q_n(z) = a_n(z - z_1)^n$.

Si, en cambio, $p_1 < n$, entonces $Q_{n-p_1}(z)$ es un polinomio de grado $n - p_1$ que no se divide por $z - z_1$, y su coeficiente mayor es distinto de cero. A este polinomio se puede aplicar el teorema básico, en virtud de cual él tiene una raíz compleja. Designémosla mediante z_2 y su multiplicidad, mediante p_2. Como resultado obtenemos

$$Q_n(z) = (z - z_1)^{p_1}(z - z_2)^{p_2} Q_{n-p_1-p_2}(z)$$
$$(Q_{n-p_1-p_2}(z_j) \neq 0, \quad j = 1, 2).$$

Si $n - p_1 - p_2 = 0$, entonces $Q_{n-p_1-p_2}(z) = a_n$. Si no, el proceso puede continuarse. Sin embargo, dicho proceso quedará por terminado, acabado un número finito (no superior a n) de etapas, y obtendremos la fórmula (3). Si en lugar de z en el segundo miembro de (3) sustituimos un número distinto de $z_1, \ldots, z_l$, dicho miembro no se convertirá a cero, lo que es indicio de que el polinomio Q_n está privado de otras raíces, salvo las halladas, y la representación (3) es única.

§ 5.5. Polinomio real de n-ésimo grado

Un polinomio

$$Q_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \quad (a_n \neq 0) \tag{1}$$

se denomina *real*, si sus coeficientes a_k son números reales. Dicha denominación se debe a que un polinomio real, si se examina sólo para una variable real $z = x$, adopta los valores reales. Por supuesto, para z complejos un polinomio real toma, en el caso general, los valores complejos.

LEMA. *Para un polinomio real $Q_n(z)$ se verifica la igualdad*

$$Q_n(\bar{z}) = \overline{Q_n(z)}, \quad \forall z.$$

Demostración. Nuestros razonamientos se basarán en las igualdades (8) del § 5.3 y en el hecho de que para a_k reales tiene lugar $a_k = \bar{a}_k$.

Se tiene

$$Q_n(\bar{z}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \bar{z}^k = \sum_{k=0}^{n} \bar{a}_k \overline{z^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z^k} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k} = \overline{Q_n(z)}, \tag{2}$$

lo que se trataba de demostrar.

TEOREMA 1. *Si $z_0 = \alpha + i\beta$ $(\beta \neq 0)$ es una raíz compleja de ν-ésima multiplicidad de un polinomio real Q_n, entonces $\bar{z}_0 = \alpha - i\beta$ es también una raíz de Q_n de la misma multiplicidad, y en este caso*

$$Q_n(z) = [(z - \alpha)^2 + \beta^2]^\nu Q_{n-2\nu}(z), \tag{3}$$

donde $Q_{n-2\nu}(z)$ es un polinomio real de grado $n-2\nu$, distinto de cero para $z=z_0$ y $z=\bar{z}_0$.

Demostración. Sea $z_0=\alpha+i\beta$ $(\beta\neq 0)$ una raíz de Q_n. Entonces $\bar{z}_0=\alpha-i\beta$ será también una raíz de Q_n, puesto que, en virtud de (2), $Q_n(\bar{z}_0)=\overline{Q_n(z_0)}=\bar{0}=0$. Los números z_0 y $\bar{z}_0$ no son iguales entre sí y $Q_n(z)$ se divide por

$$(z-\alpha-i\beta)(z-\alpha+i\beta)=(z-\alpha)^2+\beta^2, \qquad (4)$$

es decir, por un polinomio real de segundo grado. De este modo,

$$Q_n(z)=[(z-\alpha)^2+\beta^2]\,Q_{n-2}(z),$$

donde $Q_{n-2}(z)$ es un polinomio de grado $n-2$, y, obviamente, real. Es que el cociente de la división de los polinomios reales es un polinomio real.

Si z_0 es una raíz de Q_n de multiplicidad ν y $\nu>1$, entonces z_0 es la raíz de Q_{n-2} de multiplicidad $\nu-1$, por lo cual, al reiterar nuestros razonamientos respecto de $Q_{n-2}(z)$, podemos seleccionar en él un factor (4). Entonces, el segundo factor será un polinomio real Q_{n-4} de orden $n-4$. Al repetir este proceso ν veces, obtendremos la representación de $Q_n(z)$ en la forma (3), donde $Q_{n-2\nu}(z)$ es un polinomio real de grado $n-2\nu$, que posee la propiedad $Q_{n-2\nu}(z_0)\neq 0$. Pero, en este caso, también $Q_{n-2\nu}(\bar{z}_0)\neq 0$. Efectivamente, si $\bar{z}_0$ fuera una raíz del polinomio real $Q_{n-2\nu}$, también z_0 sería forzosamente una raíz del polinomio citado.

PROBLEMA. Demuéstrese que el polinomio $Q_5(z)=z^5-3z^2+2z$ tiene no menos de tres raíces reales.

TEOREMA 2. *Un polinomio real $Q_n(z)$ cuyo coeficiente mayor $a_n\neq 0$ puede ser representado en forma de un producto*

$$Q_n(z)=a_n(z-c_1)^{\mu_1}\dots(z-c_r)^{\mu_r}[(z-\alpha_1)^2+\beta_1^2]^{\nu_1}\dots$$
$$\dots[(z-\alpha_s)^2+\beta_s^2]^{\nu_s}=a_n\prod_{j+1}^{r}(z-c_j)^{\mu_j}\prod_{j+1}^{s}[(z-\alpha_j)^2+\beta_j^2]^{\nu_j}, \qquad (5)$$

donde $\beta_j>0$, $\mu_1+\dots+\mu_r+2(\nu_1+\dots+\nu_s)=n$, $c_1,\dots,c_r$ son raíces reales de Q_n cuyas multiplicidades son $\mu_1,\dots,\mu_r$, respectivamente, y $\alpha_1\pm\beta_1 i,\dots,\alpha_1\pm\beta_s i$ son raíces complejas conjugadas dos a los de Q_n cuyas multiplicidades son $\nu_1,\dots,\nu_s$, respectivamente.

Observación. Los polinomios reales de segundo grado que figuran en el producto (5) pueden transformarse del modo siguiente:

$$(z-\alpha_j)^2+\beta_j^2=z^2-2\alpha_j z+(\alpha_j^2+\beta_j^2)=z^2+p_j z+q_j,$$
$$p_j=-2\alpha_j,\quad q_j=\alpha_j^2+\beta_j^2.$$

Por eso la fórmula (5) puede anotarse también en la forma

$$Q_n(z) = a_n \prod_{j=1}^{r} (z - c_j)^{\mu_j} \prod_{j=1}^{r} (z^2 + p_j z + q_j)^{\nu_j}, \qquad (5')$$

donde $z^2 + p_j z + q_j$ son los polinomios reales de segundo grado que tienen raíces complejas $\alpha_j \pm i\beta_j$ ($\beta_j > 0$, $p_j^2 - 4q_j = -4\beta_j^2 < 0$)

Demostración. En virtud de la fórmula (3), § 5.4,

$$Q_n(z) = \prod_{j=1}^{r} (z - c_j)^{\mu_j} Q_m(z),$$

donde $Q_m(z)$ es un polinomio real de grado $m = n - \mu_1 - \ldots - \mu_r$. Si $m = 0$, tendremos, evidentemente, $Q_m(z) = a_n$; en el caso general aplicamos sucesivamente el teorema 1 a las raíces complejas de Q_m.

Observemos que el teorema básico demuestra sólo la existencia de una raíz (compleja, generalmente) de un polinomio de n-ésimo grado sin ofrecer los métodos efectivos de buscarla en el caso general. Por otra parte, la demostración del teorema citado se efectúa por los medios del análisis matemático, y no del álgebra. Omitimos aquí la demostración de este teorema. Está relacionado orgánicamente con la teoría de funciones de una variable compleja.

Existen las fórmulas de resolución de las ecuaciones generales de segundo, tercero y cuarto órdenes. Para las ecuaciones de orden $n > 4$ no existen fórmulas semejantes. Abel [1]) demostró que ellas no podían existir. Esto se debe entender en el sentido de que para $n > 4$ las raíces de la ecuación $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ ($a_n \neq 0$) no se expresan en términos de los coeficientes a_k por medio de las funciones de estos coeficientes que representan el resultado de un número finito de operaciones pertenecientes sólo al siguiente grupo: adición, sustracción, multiplicación, división y extracción de una raíz.

§ 5.6. Integración de las expresiones racionales

La razón de dos polinomios algebraicos

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}, \qquad (1)$$

$$P_m(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m,$$
$$Q_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,$$

b_m, $a_n \neq 0$, $m \geq 0$, $n \geq 1$, lleva el nombre de *función racional*, o bien de *fracción racional*.

---

[1]) Abel N. G. (1802—1829), un destacado matemático noruego.

Convengamos en considerar que una *fracción racional f es real*, es decir, P_m y Q_n son los polinomios reales. Además, se considerará que x es una variable real.

Las funciones racionales de la forma

$$\left.\begin{array}{c} \frac{A}{x-a}, \quad \frac{A}{(x-a)^k} \quad (k\geqslant 2), \quad \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \\ \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} \quad (k\geqslant 2), \end{array}\right\} \tag{2}$$

donde A, B, a, p, q son todos los números reales, k es un número natural y el trinomio $x^2 + px + q$ no tiene raíces reales, se llamarán *fracciones simples*.

En el § 5.2 hemos mostrado cómo se calculan las integrales de las fracciones simples (véanse (4), (5), (6) (7), (11) del § 5.2).

Supongamos que se requiere hallar la integral indefinida de una función racional $f(x)$ (véase (1)). Si $m \geqslant n$, por división simple despejamos de f una parte entera:

$$f(x) = \text{polinomio} + \frac{P_{m_1}(x)}{Q_n(x)} \quad (m_1 < n).$$

La integración del polinomio es fácil y la dificultad se ha reducido a la integración de una fracción racional en la cual el grado del numerador es inferior al del denominador.

Vamos a considerar por eso que nuestra fracción racional $f(x)$ *es propia*, es decir, el grado de su numerador es menos del grado del denominador $(m < n)$.

TEOREMA 1. *Supongamos que el denominador de una fracción racional real propia se ha desarrollado según la fórmula* (5') del § 5.5:

$$Q_n(x) = a_n(x-c_1)^{\mu_1} \dots (x-c_r)^{\mu_r} \times$$
$$\times (x^2+p_1x+q_1)^{\nu_1} \dots (x^2+p_sx+q_s)^{\nu_s}.$$

Entonces la fracción (1) *puede ser representada, y, además, de un modo único, en forma de una suma de las fracciones simples*:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_{1,1}}{(x-c_1)^{\mu_1}} + \frac{A_{1,2}}{(x-c_1)^{\mu_1-1}} + \dots + \frac{A_{1,\mu_1}}{x-c_1} +$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ \frac{A_{r,1}}{(x-c_r)^{\mu_r}} + \frac{A_{r,2}}{(x-c_r)^{\mu_r-1}} + \dots + \frac{A_{r,\mu_r}}{x-c_r} +$$
$$+ \frac{B_{1,1}x+C_{1,1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\nu_1}} + \frac{B_{1,2}x+C_{1,2}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\nu_1-1}} + \dots + \frac{B_{1,\nu_1}x+C_{1,\nu_1}}{x^2+p_1x+q_1} +$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ \frac{B_{s,1}x+C_{s,1}}{(x^2+p_sx+q_s)^{\nu_s}} + \frac{B_{s,2}x+C_{s,2}}{(x^2+p_sx+q_s)^{\nu_s-1}} + \dots + \frac{B_{s,\nu_s}x+C_{s,\nu_s}}{x^2+p_sx+q_s}, \tag{3}$$

donde A, B, C (con los índices correspondientes) son los números constantes.

Este teorema afirma que para cualquier fracción racional real propia existen unos números constantes A, B, C con índices indicados de un modo tal que tiene lugar la identidad (3) para todos los x, a excepción de los valores de $x = c_1, \ldots, c_r$, para los cuales ambos miembros de (3) no están definidos. El teorema citado puede ser exactamente demostrado, pero no vamos a hacerlo aquí.

Expliquemos la enunciación del teorema 1 con un ejemplo. De acuerdo con el teorema 1, tiene lugar una igualdad

$$\frac{2x^3+x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1}, \quad (4)$$

donde A_1, A_2, M, N son los números constantes bien definidos. Para encontrarlos reducimos (4) a un denominador común e igualamos entre sí los numeradores de los miembros primero y segundo:

$$2x^3 + x^2 + x + 2 = A_1(x-1)(x^2+x+1) + \\ + A_2(x^2+x+1) + (Mx+N)(x-1)^2. \quad (5)$$

Suprimiendo los paréntesis en el segundo miembro de (5), agrupamos los términos con iguales potencias de x e igualamos los coeficientes de iguales potencias de x de ambos miembros (véase el § 4.14, el teorema 2):

$$\left.\begin{aligned} 2 &= A_1 + M, \\ 1 &= A_2 + N - 2M, \\ 1 &= A_2 + M - 2N, \\ 2 &= -A_1 + A_2 + N. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Tenemos ahora cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas A_1, A_2, M, N. Este sistema tiene (de acuerdo con el teorema 1) solución, y, además, única. Al resolver el sistema (6), obtendremos $A_1 = 1$, $A_2 = +2$, $N = M = 1$, por lo cual

$$\frac{2x^3+x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{x+1}{x^2+x+1}. \quad (7)$$

En general, si se han encontrado los coeficientes A, B, C en (3), para la integración de la fracción P_m/Q_n todo está preparado: la integral indefinida del primer miembro de (3) es igual a la suma de integrales indefinidas de todos los términos en el segundo miembro más una cierta constante C. Más arriba se ha observado que sabemos calcular las integrales de cualquiera de los términos en (3).

En el caso del ejemplo (7)

$$\int \frac{2x^3+x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\,dx = \int \frac{dx}{x-1} + 2\int \frac{dx}{(x-1)^2} +$$
$$+ \int \frac{x+1}{x^2+x+1}\,dx = \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + \ln\sqrt{x^2+x+1} +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Observación 1. La igualdad (5) es válida para cualquier $x \neq 1$. Por consiguiente, se verifica también para $x = 1$, puesto que tanto en el primer miembro, como en el segundo figuran las funciones continuas de x. Al sustituir en (5) $x = 1$, obtendremos $6 = 3A_2$, es decir, $A_2 = 2$, y, al poner $x = 0$, obtendremos $2 = -A_1 + A_2 + N$, es decir, $N = A_1$. Estos datos ($A_2 = 2$, $N = A_1$) hacen el sistema (6) considerablemente más simple. En la práctica no se deben menospreciar los razonamientos semejantes.

Observación 2. En principio toda función racional es integrable en funciones elementales. En la práctica la integración completa de (1) puede llevarse a cabo, si se conocen todas las raíces de Q_n, como también sus multiplicidades. Pero, según lo dicho en el § 5.5, no siempre es posible conocer todas las raíces. Debido a ello, toda clase de simplificación de la integral de una fracción racional (1) resulta ser muy valiosa.

Desde este punto de vista merece gran atención un método propuesto por Ostrogradski[1]) que se expone corrientemente en los libros de texto más detallados[2]).

§ 5.7. Integración de las funciones irracionales

La integración de las funciones elementales que no sean racionales representa grandes dificultades, incluso cuando una función elemental, que es la integral de una función dada, realmente existe.

Examinemos los casos en que con ayuda del cambio de variable se puede reducir la integración de las funciones irracionales a la de las funciones racionales (es decir, como suele decirse, racionalizar la integral).

Sea $R(x, y)$ una función racional de sus argumentos x e y, es decir, con x e y se realizan sólo las operaciones aritméticas con

---

[1]) Ostrogradski V. M. (1801—1861), un destacado matemático ruso.

[2]) Véase, por ejemplo, «Curso del análisis matemático» de Nikolski S. M. v. I, § 8.7.

el fin de obtener $R(x, y)$. Por ejemplo,

$R(x, y)=\frac{axy+y^2}{cx+x^{10}y}$ es una función racional, y la función

$f(x, y)=\sqrt{x+y}+x^2$ no es racional.

I. CALCÚLESE $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, donde a, b, c, d son unos números constantes, m es un número natural, $ad-bc\neq 0$, $R(x, y)$ es una función racional.

La función de la forma $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ se denomina *irracionalidad lineal fraccionaria*.

Probemos que la sustitución $t=\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ racionaliza la integral. Efectivamente, $t^m=\frac{ax+b}{cx+d}$, de donde $x=\frac{b-dt^m}{ct^m-a}$ es una función racional de t. Luego,

$$dx=\frac{mt^{m-1}[ad-bc]}{(ct^m-a)^2}dt.$$

Por eso

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx=$$

$$=\int R\left(\frac{b-dt^m}{ct^m-a}, t\right)\frac{mt^{m-1}[ad-bc]}{(ct^m-a)^2}dt=\int R_1(t)\,dt,$$

donde $R_1(t)$ es una función racional con relación a t; nosotros sabemos cómo integrarla.

EJEMPLO 1. Calcúlese $\int\frac{1}{(x-1)^2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx$. Aquí $R(x, y)=$ $=\frac{y}{(x-1)^2}$. Suponiendo $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}=t$, obtendremos $x=\frac{t^3+1}{t^3-1}$, $dx=\frac{-6t^2\,dt}{(t^3-1)^2}$, $x-1=\frac{2}{t^3-1}$. De tal manera $\int\frac{1}{(x-1)^2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx=$ $=\int t\frac{-6t^2}{(t^3-1)^2}\cdot\frac{(t^3-1)^2}{4}dt=-\frac{3}{2}\int t^3\,dt=-\frac{3}{8}t^4+C=-\frac{3}{8}\times$ $\times\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\right)^4+C.$

EJEMPLO 2.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\int\frac{dx}{(\sqrt[6]{x})^3+(\sqrt[6]{x})^2}=(\sqrt[6]{x}=t)=$$

$$=\int\frac{6t^5\,dt}{t^2+t^3}=6\int(t^2-t+1)\,dt-\ln|1+t|=$$

$$=2t^3-3t^2+6t-\ln|1+t|+C.$$

II. CALCÚLESE $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$, donde a, b, c son los números constantes. La función $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ se llamará *irracionalidad cuadrática.*

Si el trinomio ax^2+bx+c tiene raíces reales x_1, x_2, entonces $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$ y

$$R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) = R\left(x, (x-x_1)\sqrt{\frac{x-x_2}{x-x_1}a}\right) = \\ = R_1\left(x, \sqrt{\frac{x-x_2}{x-x_1}}\right),$$

y el caso se reduce, de este modo, al caso I.

Por eso convengamos en considerar que ax^2+bx+c no tiene raíces reales y $a > 0$. Entonces, la racionalización de la integral puede obtenerse con ayuda de la sustitución de Euler[1]):

$$t = \sqrt{ax^2+bx+c} + x\sqrt{a}.$$

De aquí, $ax^2+bx+c = t^2 - 2x\sqrt{a}\,t + ax^2$, es decir, $x = \frac{t^2-c}{2t\sqrt{a}+b}$ es una función racional de t. Pero, en este caso

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - x\sqrt{a} = t - \frac{t^2-c}{2t\sqrt{a}+b}\sqrt{a}$$

será también una función racional de t. Por ello

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx = \int R_1(t)\,dt.$$

Observación. Si $a < 0$, y $c > 0$ ($ax^2+bx+c \geqslant 0$), podemos realizar una sustitución

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}.$$

EJEMPLO 3. Calcúlese $\int \sqrt{a^2+x^2}\,dx$.

El binomio x^2+a^2 no tiene raíces reales. Por lo tanto suponemos

$$t = \sqrt{x^2+a^2} + x, \quad x^2+a^2 = t^2 - 2tx + x^2, \quad x = \frac{t^2-a^2}{2t}$$

y

$$\sqrt{x^2+a^2} = t - x = \frac{t^2+a^2}{2t}.$$

De aquí

$$x\sqrt{x^2+a^2} = \frac{t^4-a^4}{4t^2}, \quad dx = \frac{t^2+a^2}{2t^2}\,dt.$$

---

[1]) Esta sustitución puede aplicarse también en el caso de raíces reales para $a > 0$ en un intervalo, donde $ax^2+bx+c \geqslant 0$.

En virtud de ello

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \int \frac{t^2+a^2}{2t}\cdot\frac{t^2+a^2}{2t^2}\,dt = \frac{1}{4}\int\left[t+\frac{2a^2}{t}+\frac{a^4}{t^3}\right]dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\ln|t| + \frac{t^2}{8} - \frac{a^4}{8t^2} + C = \frac{a^2}{2}\ln|t| + \frac{t^4-a^4}{8t^2} + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + C.$$

III. INTEGRACIÓN DE LAS EXPRESIONES $R(\cos x,\ \operatorname{sen} x)$.

La racionalización de $\int R(\cos x,\ \operatorname{sen} x)\,dx$ se consigue con ayuda de la sustitución $t = \operatorname{tg}(x/2)$ $(-\pi < x < \pi)$, la cual se denomina *universal*. En efecto,

$$\operatorname{sen} x = \frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

por lo cual

$$\int R(\cos x,\ \operatorname{sen} x)\,dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)\,dt.$$

Si la función $R(x, y)$ posee las propiedades de paridad o imparidad respecto de las variables x o y, pueden emplearse también otras sustituciones que asimismo racionalizan la integral.

Sea

$$R(u, v) = \frac{P(u, v)}{Q(u, v)} \quad (u = \cos x, \quad v = \operatorname{sen} x),$$

donde P y Q son los polinomios de u y v.

1) Si uno de los polinomios P, Q es par respecto de v, y el otro, impar respecto de v, la sustitución $t = \cos x$ racionaliza la integral.

2) Si uno de los polinomios P, Q es par respecto de u, y el otro, impar respecto de u, la sustitución $t = \operatorname{sen} x$ racionaliza la integral.

3) Si P y Q: a) ambos no varían al sustituir u, v por $-u$, $-v$, respectivamente, o bien b) ambos cambian de signo, la integral se racionaliza por la sustitución $t = \operatorname{tg} x$ (o $t = \operatorname{ctg} x$).

EJEMPLOS:

1°. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \left(t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$

2°. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^4 x}\,dx = -\int \frac{\operatorname{sen}^2 x\,d(\cos x)}{\cos^4 x} =$

$$= -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^4 x}\,d(\cos x) = (t = \cos x) = -\int \frac{1-t^2}{t^4}\,dt.$$

En el caso dado $R(u, v) = \frac{v^3}{u^4} = \frac{v^3}{u^4 v^0}$, es decir, el numerador es impar respecto de v, mientras que el denominador es par respecto de v, y se trata, pues, del caso 1).

3°. $\int \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \operatorname{sen}^2 x} = \int \frac{dx}{(a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 x) \cos^2 x} = (t = \operatorname{tg} x) = \int \frac{dt}{a^2 + b^2 t^2}$.

Aquí el numerador $P(u, v) = 1$, y el denominador $Q(u, v) = a^2u^2 + b^2v^2$. Ambos no varían al cambiar u, v por $-u$, $-v$, respectivamente, es decir, se trata del caso 3a).

14-01380

Capítulo 6

Integral definida

§ 6.1. Problemas que conducen al concepto de integral definida, definición de la integral definida

a) Definamos en un segmento $[a, b]$ (a y b son los números finitos) una función continua no negativa $f(x)$. Su gráfica está expuesta en la fig. 75. Planteemos un problema: se requiere dar el concepto de área de una figura limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x, las rectas $x = a$ y $x = b$, y calcular dicha área. Parece natural resolver el problema planteado del modo siguiente.

Realicemos la partición del segmento $[a, b]$ en n partes por medio de los puntos

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \tag{1}$$

elijamos en cada uno de los segmentos parciales obtenidos

$$[x_j, x_{j+1}] \quad (j = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{2}$$

un punto arbitrario $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$, hallemos los valores de la función f en dichos puntos y formemos una suma

$$S_n = \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\,\Delta x_j \quad (\Delta x_j = x_{j+1} - x_j), \tag{3}$$

la cual se denomina *suma integral* y esta suma es igual, evidentemente, a la suma de las áreas de los rectángulos rayados (véase la fig. 75).

Ahora, hagamos tender todos los Δx_j hacia cero y, además, de un modo tal que el segmento parcial máximo (más grande) de la partición tiende hacia cero. Si en este caso la magnitud S_n tiende a un límite determinado S, que no depende de cómo se hace la partición (1) y se eligen los puntos ξ_j en los segmentos parciales, resulta natural llamar la magnitud S *área de nuestra figura curvilínea.* De este modo,

$$S = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\,\Delta x_j. \tag{4}$$

Así pues, se ha dado la definición de área de nuestra figura curvilínea (trapecio). Surge una pregunta ¿si tiene área cada figura

de esta índole, en otras palabras, si tiende, de hecho, a un límite finito su suma integral S_n cuando $\Delta x_j \to 0$? En adelante se demostrará que dicho problema se resuelve positivamente: cada figura curvilínea, definida más arriba y correspondiente a cierta función continua $f(x)$, tiene de hecho un área en el sentido de la definición ofrecida que se expresa, de este modo, por un número S dependiente de la figura en consideración.

La otra cuestión que surge, a saber, hasta qué punto es natural la definición dada de área, se resuelve, como siempre en los casos

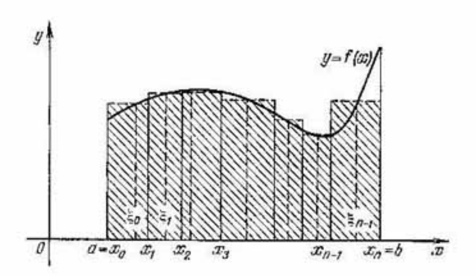


Fig. 75

semejantes, por la práctica. Diremos sólo que la práctica ha comprobado enteramente dicha definición. Tendremos muchas ocasiones para cerciorarnos de la validez de la definición propuesta.

b) Sea dada una varilla lineal no homogénea que yace en el eje x dentro de los límites del segmento $[a, b]$. Hay que determinar la masa de esta varilla. Supongamos que la densidad de distribución de la masa a lo largo de la varilla es una cierta función continua de x: $\rho(x)$.

Para determinar la masa de la varilla, dividámosla en n partes arbitrarias mediante los puntos $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Elijamos en cada una de las partes $[x_i, x_{i+1}]$ un punto arbitrario ξ_i.

Por cuanto la función $\rho(x)$ varía poco dentro de los límites de $[x_i, x_{i+1}]$, la masa de la parte de la varilla, correspondiente al segmento $[x_i, x_{i+1}]$, puede considerarse igual aproximadamente a $\rho(\xi_i)\Delta x_i$, donde $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

La masa m de toda la varilla es igual aproximadamente a

$$\rho(\xi_0)\Delta x_0 + \rho(\xi_1)\Delta x_1 + \ldots + \rho(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \rho(\xi_i)\Delta x_i.$$

El valor exacto de la masa obtendremos, evidentemente, en límite, cuando el segmento parcial máximo tiende a cero, es decir,

$$m = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \rho(\xi_i) \Delta x_i \qquad (4')$$

Ambos problemas examinados nos han conducido a una misma operación matemática sobre las funciones de diferente origen definidas en el segmento $[a, b]$. Nos encontraremos con varios otros problemas concretos cuya resolución se reduce a la operación semejante sobre una función que está prefijada en un segmento. Esta operación lleva el nombre de *integración de la función en un segmento* y su resultado, que es un número, se llama *integral definida de la función en un segmento.*

DEFINICIÓN 1. *Supongamos que en un segmento* $[a, b]$ *viene dada la función* f. *Dividamos* $[a, b]$ *en partes mediante los puntos arbitrarios*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b,$$

y diremos que de este modo se ha realizado la partición R *del segmento* $[a, b]$. *En cada uno de los segmentos parciales* $[x_j, x_{j+1}]$ *de la partición elijamos un punto arbitrario* $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$ *y formemos una suma*

$$\sigma_R = \sigma_R(f) = \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j) \Delta x_j \quad (\Delta x_j = x_{j+1} - x_j),$$

llamada suma integral de la función f, *correspondiente a la partición* R.

Designemos con

$$\lambda_R = \max_{0 \leqslant j \leqslant n-1} \Delta x_j$$

la longitud máxima de los segmentos parciales $[x_j, x_{j+1}]$ *de la partición* R.

Un límite (si existe), al cual tiende la suma integral σ_R, *cuando* $\lambda_R \to 0$, *se denomina integral definida de la función* f *en el segmento* $[a, b]$ *y se designa así:*

$$\lim_{\lambda_R \to 0} \sigma_R = \lim_{\max \Delta x_j \to 0} \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j) \Delta x_j = \int_a^b f(x)\,dx \quad (a < b). \qquad (5)$$

El número a se llama *límite inferior* de la integral definida y el número b, *límite superior* de la integral.

La definición 1 es equivalente a la que sigue.

DEFINICIÓN 1'. *Se denomina integral definida de una función* f *en un segmento* $[a, b]$ *un número* I *que satisface la propiedad siguiente: para todo* $\varepsilon > 0$ *se puede encontrar un número* $\delta > 0$ *tal que, cual-*

quiera que sea la partición R del segmento $[a, b]$ *en el que*

$$\lambda_R = \max_j \Delta x_j < \delta,$$

se verifica la desigualdad

$$|\sigma_R - I| = \left|\sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\,\Delta x_j - I\right| < \varepsilon$$

para la elección arbitraria de los puntos $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$.

El concepto de integral definida, tal como lo hemos propuesto, fue introducido para funciones continuas por un matemático francés Cauchy. Riemann[1]) introdujo dicho concepto en el caso general, para las funciones no necesariamente continuas (integrables según Riemann). El límite (5) se denomina, habitualmente, *integral de Riemann* y la función, para la cual el límite mencionado existe, se denomina *integrable según Riemann.*

Si la función f es continua en $[a, b]$, para ella siempre existe (como lo sabremos más abajo) el límite (5).

Suele decirse también que una función continua en el segmento $[a, b]$ *es integrable* en él *según Cauchy.*

En el punto a) hemos determinado (véase la fig. 75) el área de una figura plana limitada superiormente por la gráfica de la función continua $y = f(x) \geqslant 0$, inferiormente por el eje x y por los lados, mediante las rectas $x = a$ y $x = b$. Ahora podemos decir que el área de esta figura es igual a la integral definida de f en el segmento $[a, b]$:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Podemos decir también que la masa de la varilla, de la cual se ha tratado en el p. b), es igual a la integral definida de su densidad lineal $\rho(x)$ dentro de los límites $[a, b]$:

$$m = \int_a^b \rho(x)\,dx.$$

Así pues, por definición, se denomina *integral definida de la función f en el segmento* $[a, b]$ *un límite de la suma integral* (5), *cuando el segmento parcial máximo de la partición R tiende a cero.*

En esta definición, la cual ya no está relacionada con el problema de búsqueda del área de una figura, la función f no es obligatoriamente continua y no negativa en $[a, b]$. Cabe notar que esta definición no afirma la existencia de una integral definida para

[1]) Riemann B. F. (1826—1866), un destacado matemático alemán.

cualquier función f dada en $[a, b]$, es decir, la existencia del límite (5). Ella dice sólo que si este límite existe para una función f dada en $[a, b]$, se llamará integral definida de f en $[a, b]$.

Se debe tener en cuenta, además, que cuando se dice que el límite indicado I existe, se supone que éste no depende de cómo se divide el segmento $[a, b]$ en partes ni tampoco de cómo se eligen los puntos ξ_i dentro de los segmentos parciales obtenidos.

El cálculo inmediato de la integral definida según la fórmula (5) representa ciertas dificultades, puesto que las sumas integrales de unas funciones algo complicadas son bastante engorrosas y sucede muy frecuente que no es fácil transformarlas a una forma que sea cómoda para calcular los límites. En todo caso, en este camino no se ha conseguido hasta ahora crear algunos métodos generales. Es interesante observar con este motivo que Arquímedes fue el primero en plantear el problema de este género. Con ayuda de los razonamientos que recuerdan remotamente el método moderno de límites él calculó el área del segmento de una parábola. Ulteriormente, en el transcurso de siglos, a muchos matemáticos les tocaba a resolver los problemas referentes al cálculo de las áreas de las figuras y de los volúmenes de ciertos cuerpos. No obstante, aun en el siglo XVII el planteamiento de tales problemas y los métodos de su resolución llevaban un carácter sumamente particular. Un progreso considerable en este respecto se debe a Newton y Leibniz[1]) que indicaron el método general de resolución de dichos problemas. Han mostrado que el cálculo de la integral definida de una función puede ser reducido a la búsqueda de su primitiva.

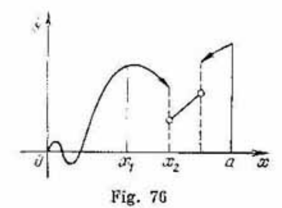


Fig. 76

Según lo observado más arriba, una función continua en $[a, b]$ es integrable en $[a, b]$. Esto se demostrará en el § 6.7. Demostraremos también que una función monótona en $[a, b]$ será integrable en el segmento citado. Es preciso tomar en consideración que una función monótona puede tener discontinuidades en un número finito o incluso en un numerable (véase el teorema 2, del § 3.4).

En la fig. 76 viene expuesta la gráfica de la función $y = f(x)$ prefijada en el segmento $[0, a]$. Esta función es continua en $[0, x_1]$, decrece en $[x_1, x_2]$ y crece en $[x_2, a]$. Por consiguiente, es integrable en cada uno de los segmentos mencionados. Pero, en este caso, en virtud de las propiedades aditivas de la integral de las cuales trata-

[1]) Newton I. (1643—1727), un ilustre físico, matemático inglés. Leibniz G. (1646—1716), un eminente matemático alemán.

remos en adelante, nuestra función será integrable en todo el segmento $[0, a]$ (véase el § 6.2, el teorema 3).

De este modo, si un segmento $[a, b]$, en el cual viene dada la función $y = f(x)$, puede ser partido en un número finito de segmentos parciales en cada uno de los cuales dicha función sea continua o monótona, será integrable en $[a, b]$.

Newton y Leibniz demostraron un teorema que liga dos conceptos importantes del análisis matemático: el concepto de integral y el de derivada. El teorema citado se expresa mediante la relación siguiente (fórmula de Newton—Leibniz)

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{6}$$

Aquí $f(x)$ es una función continua arbitraria en $[a, b]$, mientras que $F(x)$ es una primitiva suya en $[a, b]$ $(F'(x) = f(x))$.

De tal manera, *para calcular la integral definida de una función continua f en el segmento $[a, b]$, se debe determinar su función primitiva $F(x)$ y tomar la diferencia, $F(b) - F(a)$, de valores de esta primitiva en los extremos del segmento $[a, b]$.*

Si se da por seguro que una función $f(x)$, continua en el segmento $[a, b]$, es integrable en él y que para dicha función existe la primitiva $F(x)$, la fórmula (6) se deduce sin dificultades algunas.

Sea R una partición arbitraria

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

del segmento $[a, b]$ en partes. Entonces (las explicaciones vienen más abajo)

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - \ldots$$

$$\ldots - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} [F(x_{k+1}) - F(x_k)] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} F'(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \xrightarrow[\lambda_R \to 0]{} \int_a^b f(x)\, dx, \tag{7}$$

de lo cual se desprende la fórmula (6).

En la cuarta igualdad de (7) se ha empleado el teorema de Lagrange del valor medio

$$F(x_{k+1}) - F(x_k) = F'(\xi_k)(x_{k+1} - x_k),$$

en virtud del cual ξ_k es un punto del intervalo (x_k, x_{k+1}). La última relación proviene del hecho de que la función f es continua en $[a, b]$ y, por lo tanto, integrable en $[a, b]$, razón por la cual su cualquier

suma integral, y, en particular, la que se ha obtenido como resultado de aplicar el teorema de Lagrange, tiende, para $\lambda_R \to 0$, a una cierta integral de f en $[a, b]$.

Resulta válido el teorema.

TEOREMA 1. *Una función no acotada en el segmento $[a, b]$ será no integrable en dicho segmento.*

De este modo, *para que una función f sea integrable en el segmento $[a, b]$, es necesario que sea acotada en este segmento.*

Sin embargo, esta condición no es suficiente.

EJEMPLO. La función

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es racional}, \\ -1, & \text{si } x \text{ es irracional}, \end{cases}$$

está acotada: $|\psi(x)| = 1$, pero no es integrable en cualquier segmento $[a, b]$ $(a < b)$.

Efectivamente, si en la suma integral de esta función elegimos, a título de los puntos ξ_j, los números racionales, entonces

$$\sigma_R = \sum_{j=0}^{n-1} \psi(\xi_j)\,\Delta x_j = \sum_{j=0}^{n-1} 1 \cdot \Delta x_j = b - a.$$

En cambio, si elejimos ξ_j irracionales, tendremos

$$\sigma_R = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)\,\Delta x_j = -(b-a).$$

Esto prueba que σ_R no puede tener un mismo límite, cualquiera que sea la elección de ξ_j, y, por ende, la función ψ es no integrable en $[a, b]$.

Demostración del teorema 1. Sea

$$\sigma_R = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,(x_{i+1} - x_i)$$

una suma integral de la función f correspondiente a cierta partición R: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Si admitimos que la función f no está acotada en $[a, b]$, será forzosamente no acotada en uno de los segmentos parciales, sea en $[x_{i_0}, x_{i_0+1}]$. Fijemos $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ para todos los $i \neq i_0$, considerando por ahora ξ_{i_0} variable. El sumando $f(\xi_{i_0})(x_{i_0+1} - x_{i_0})$ no está acotado en $[x_{i_0}, x_{i_0+1}]$, mientras que la suma de los demás sumandos es un número bien determinado. Pero, en este caso, $|\sigma_R|$ puede hacerse tan grande como se quiera con la elección correspondiente del punto $\xi_{i_0} \in [x_{i_0}, x_{i_0+1}]$ y la función f no puede ser integrable en $[a, b]$, pues de la integrabilidad de una función f en $[a, b]$ proviene que sus sumas integrales están acotadas para ξ_i cualquiera.

Además, en adelante se introducirá el concepto de integral impropia. Algunas funciones no acotadas en un segmento son integrables en el sentido impropio. Mas, esto será el objeto de nuestros razonamientos ulteriores.

§ 6.2. Propiedades de las integrales definidas

En este párrafo estudiaremos las propiedades de las funciones integrables. Se ha observado más arriba que las funciones continuas y monótonas en un segmento $[a, b]$ son integrables en dicho segmento. La demostración de esta afirmación se realizará en el § 6.7.

TEOREMA 1. *Si M es una constante, se tiene*

$$\int_a^b M\,dx = M(b-a). \tag{1}$$

Efectivamente, la suma integral de la función $f(x) = M$ para cualquier partición R del segmento $[a, b]$ es igual a

$$\sigma_R = \sum_{j=0}^{n-1} M\Delta x_j = M\sum_{j=0}^{n-1} \Delta x_j = M(b-a).$$

De aquí

$$\lim_{\lambda_R \to 0} \sigma_R = M(b-a).$$

TEOREMA 2 *Para una función*

$$\psi_c(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a, b], \quad x \neq c \\ A, & x = c, \end{cases}$$

$$\int_a^b \psi_c(x)\,dx = 0.$$

En efecto, prefijemos arbitrariamente una partición R del segmento $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Uno de los semiintervalos de esta partición, supongamos $[x_m, x_{m+1})$, contiene dentro de sí el punto c: $x_m \leqslant c < x_{m+1}$. Por eso la suma integral

$$\sigma_R(\psi_c) = \sum_{k=0}^{n-1} \psi_c(\xi_k)\,\Delta x_k = \psi_c(\xi_{m-1})\,\Delta x_{m-1} + \psi_c(\xi_m)\,\Delta x_m$$

(los sumandos restantes son nulos a ciencia cierta). Puesto que $|\psi_c(x)| \leqslant |A|$ tenemos

$$|\sigma_R(\psi_c)| \leqslant |A|\,(\Delta x_{m-1} + \Delta x_m) \to 0$$

para $\lambda_R \to 0$, y el teorema queda demostrado.

TEOREMA 3. *Si la función f es integrable en cada uno de los segmentos $[a, c]$, $[c, b]$ $(a < c < b)$, será integrable en $[a, b]$ y*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \tag{2}$$

(propiedad aditiva de la integral definida).

Demostración. Sea R una partición arbitraria del segmento $[a, b]$

$$R\colon a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,$$

de tal genero que uno de los puntos de R, sea x_m, coincide con el punto c ($x_m = c$). Entonces R induce en los segmentos $[a, c]$ y $[c, b]$ ciertas particiones R_1 y R_2:

$$R_1\colon a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = c,$$
$$R_2\colon c = x_m < x_{m+1} < \ldots < x_n = b$$

y

$$\sigma_R = \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\,\Delta x_j = \sum_{j=0}^{m-1} f(\xi_j)\,\Delta x_j + \sum_{j=m}^{n-1} f(\xi_j)\,\Delta x_j = \sigma_{R_1} + \sigma_{R_2},$$

es decir, $\sigma_R = \sigma_{R_1} + \sigma_{R_2}$. Sea

$$\lambda_R = \max_{0 \leqslant j \leqslant n-1} |\Delta x_j| \to 0.$$

Entonces, con mayor razón $\lambda_{R_1} \to 0$ y $\lambda_{R_2} \to 0$. Por consiguiente,

$$\lim_{\lambda_R \to 0} \sigma_R = \lim_{\lambda_{R_1} \to 0} \sigma_{R_1} + \lim_{\lambda_{R_2} \to 0} \sigma_{R_2} = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Esta igualdad se ha demostrado por ahora para las particiones R que contienen el punto c. Pero, en tal caso, queda lícita también para cualesquiera particiones R (véase el lema 1 más abajo). Por consiguiente, la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ existe y se verifica la igualdad (2).

Por definición

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0, \tag{3}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx, \quad b < a, \tag{4}$$

donde f es integrable en $[b, a]$.

No es difícil ver (al tomar en consideración las afirmaciones (3) y (4)) que la igualdad (2) es lícita para cualesquiera números a, b, c, con tal de que f sea integrable en el máximo de los segmentos $[a, b]$, $[a, c]$, $[c, b]$.

Por ejemplo, en el caso de que si $c < a < b$, en virtud del teorema 3, tenemos

$$\int_c^b f\,dx = \int_c^a f\,dx + \int_a^b f(x)\,dx$$

o bien

$$\int_a^b f\,dx = \int_c^b f\,dx - \int_c^a f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx,$$

y se ha obtenido (2).

TEOREMA 4. *Si las funciones f_1 y f_2 son integrables en $[a, b]$ y A, B son los números arbitrarios, entonces*

$$\int_a^b (Af_1 + Bf_2)\,dx = A\int_a^b f_1\,dx + B\int_a^b f_2\,dx. \tag{5}$$

En particular, cuando $B = 0$, obtenemos la igualdad

$$\int_a^b Af_1\,dx = A\int_a^b f_1\,dx, \tag{6}$$

es decir, un factor constante se puede sacar fuera del signo de la integral definida.

Para $A = 1$, $B = \pm 1$, obtenemos

$$\int_a^b (f_1 \pm f_2)\,dx = \int_a^b f_1\,dx \pm \int_a^b f_2\,dx. \tag{7}$$

Demostración. Para una partición arbitraria R tenemos

$$\sum_{j=0}^{n-1} [Af_1(\xi_j) + Bf_2(\xi_j)]\,\Delta x_j = A\sum_{j=0}^{n-1} f_1(\xi_j)\,\Delta x_j + B\sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\,\Delta x_j.$$

De aquí, pasando al límite para $\lambda_R \to 0$, obtendremos la igualdad (5). La última es, evidentemente, obvia también para $b \leqslant a$.

TEOREMA 5. *Si una función f, integrable en $[a, b]$, se modifica en el punto $c \in [a, b]$, entonces para una función f_1 obtenida como resultado de la modificación, tiene lugar la igualdad*

$$\int_a^b f_1(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Demostración. La modificación de la función f sólo en un punto c se reduce a que se adiciona a $f(x)$ una función del tipo

$$\psi_c(y)=\begin{cases} 0, & x\in[a,\ b],\quad x\neq c,\\ A, & x=c,\end{cases}$$

donde A es un cierto número. Entonces

$$f_1(x)=f(x)+\psi_c(x)$$

y, de acuerdo con el teorema 2,

$$\int_a^b \psi_c(x)\,dx=0.$$

Por eso, en virtud del teorema 4,

$$\int_a^b f_1(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b \psi_c(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx,$$

lo que se trataba de demostrar.

Observación 1. El teorema 5 muestra que la integrabilidad de la función f no depende de los valores que ella toma en cierto punto determinado.

Por ejemplo, una función $\psi(x)=(\operatorname{sen} x)/x$ está definida en el semiintervalo $(0,\ 1]$. Si la ponemos igual a uno para $x=0$ ($\psi(0)=1$), será continua y, por ende, integrable en el segmento $[0,\ 1]$. Mas, quedará integrable y su integral $\int_0^1 \psi(x)\,dx$ será igual al mismo valor, si ponemos $\psi(0)=A$, donde A es un número cualquiera.

TEOREMA 6. *Si las funciones f y φ son integrables en un segmento $[a,\ b]$ y satisfacen en dicho segmento la desigualdad*

$$f(x)\leqslant\varphi(x),$$

entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx\leqslant\int_a^b \varphi(x)\,dx\quad (a\leqslant b). \tag{8}$$

Demostración. Para cualquier partición R

$$\sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\,\Delta x_j\leqslant\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(\xi_j)\,\Delta x_j,$$

puesto que $\Delta x_j>0$. Por esta razón, después de pasar al límite para $\lambda_R\to 0$, obtendremos (8).

TEOREMA 7. *Es válida la desigualdad*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx \quad (a \leqslant b) \tag{9}$$

o bien, si a no es necesariamente inferior a b, tenemos

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int_a^b |f(x)|\,dx\right|, \tag{9'}$$

siempre que f y $|f|$ *son integrables en* $[a, b]$.

Demostración. Es evidente que

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|, \quad \forall x \in [a, b].$$

Pero, en este caso, en virtud del teorema 6,

$$\int_a^b (-|f(x)|)\,dx \leqslant \int_a^b f\,dx \leqslant \int_a^b |f|\,dx, \quad (a < b)$$

o bien

$$-\int_a^b |f|\,dx \leqslant \int_a^b f\,dx \leqslant \int_a^b |f|\,dx,$$

ó

$$\left|\int_a^b f\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f|\,dx \quad (a < b),$$

lo que se trataba de demostrar.

Cuando $a < b$, los miembros segundos de (9) y (9′) son iguales entre sí. En cambio, si $b < a$, entonces, debido a (4),

$$\left|\int_a^b f\,dx\right| = \left|\int_b^a f\,dx\right| \leqslant \int_b^a |f|\,dx = \left|\int_a^b |f|\,dx\right|,$$

es decir, se verifica (9′).

Por fin, el caso en que $a = b$ se reduce a una relación obvia $0 \leqslant 0$. Con esto queda demostrada (9).

Observación 2. La integrabilidad de f en $[a, b]$ lleva consigo la integrabilidad de $|f|$ en $[a, b]$ (véase más abajo el § 6.7, la observación 2). Para las funciones concretas esto es siempre evidente. Por ejemplo, si una función f es continua a trozos en $[a, b]$ (dicha función es integrable lo que se demostrará más abajo), entonces también $|f|$ es continua a trozos.

Viceversa, de la integrabilidad de $|f(x)|$ no se deduce, en el caso general, la integrabilidad de $f(x)$ en $[a, b]$.

Por ejemplo, la función $\psi(x)$, aducida en el ejemplo del § 6.1,

$$\psi(x)=\begin{cases} 1 \text{ para } x \text{ racionales}, \\ -1 \text{ para } x \text{ irracionales}, \end{cases}$$

no es integrable en $[a, b]$. Entre tanto $|\psi(x)|=1$ en $[a, b]$ es precisamente una función integrable en $[a, b]$.

TEOREMA 8. *Si una función f es integrable y no negativa en $[a, b]$ y existe un punto $c \in [a, b]$ de continuidad de f, para el cual $f(c)>0$, entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx>0 \quad (a<b). \tag{10}$$

Demostración. Vamos a considerar que $c \in (a, b)$. Por cuanto f es continua en el punto c y $f(c)>0$, existe un segmento $[c-\delta, c+\delta]$ tal que (véase el § 3.3, el teorema 4)

$$f(x)>\frac{f(c)}{2}=\eta>0, \quad \forall x \in [c-\delta, c+\delta].$$

Entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^{c-\delta} f(x)\,dx+\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\,dx+\int_{c+\delta}^b f(x)\,dx>0,$$

puesto que

$$\int_a^{c-\delta} f(x)\,dx \geqslant 0, \quad \int_{c+\delta}^b f(x)\,dx \geqslant 0,$$

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\,dx \geqslant \int_{c-\delta}^{c+\delta} \eta\,dx=2\delta\eta>0.$$

Si $c=a$, o bien $c=b$, entonces en lugar de $[c-\delta, c+\delta]$ tendremos que examinar el segmento $[a, a+\delta]$, ó $[b-\delta, b]$, respectivamente.

LEMA 1. *Sea R_* una partición arbitraria del segmento $[a, b]$ que contenga, a título del punto de partición, un punto c.*

La función f está acotada en el segmento $[a, b]$ y para sus sumas integrales, correspondientes sólo a las particiones del tipo R_*, se verifica

$$\lim_{\lambda_{R_*}\to 0} \sigma_{R^*}=I.$$

Entonces la función f es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b f(x)\,dx=I=\lim_{\lambda_R\to 0} \sigma_R.$$

Demostración. Sea R una partición arbitraria del segmento $[a, b]$ la cual no contiene el punto c:

$$R: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m < x_{m+1} < \ldots x_n = b,$$

donde $x_m < c < x_{m+1}$.

Al adicionar a R el punto c, obtenemos la partición R_*. Si $\lambda_R \to 0$, entonces también $\lambda_{R_*} \to 0$.

Al suprimir en σ_R el sumando $f(\xi_m)(x_{m+1} - x_m)$ y sumar $f(\xi'_m)(c - x_m) + f(\xi''_m)(x_{m+1} - c)$, obtenemos la suma integral σ_{R_*}. Además,

$$\sigma_R = \sigma_{R_*} + \mu,$$

donde $\mu = f(\xi_m)(x_{m+1} - x_m) - f(\xi'_m)(c - x_m) - f(\xi''_m)(x_{m+1} - c)$, $x_m \leqslant \xi'_m \leqslant c$, $c \leqslant \xi''_m \leqslant x_{m+1}$. Es evidente que

$$|\mu| \leqslant M(x_{m+1} - x_m) + M(c - x_m) + M(x_{m+1} - c) = 2M(x_{m+1} - x_m) \xrightarrow[\lambda_R \to 0]{} 0.$$

Por consiguiente,

$$\lim_{\lambda_R \to 0} \sigma_R = \lim_{\lambda_{R_*} \to 0} \sigma_{R_*} + \lim_{x_{m+1} - x_m \to 0} \mu = I + 0 = I.$$

§ 6.3. Integral como función del límite superior

Observemos que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du,$$

es decir, no importa respecto de qué letra —x ó u— se realiza en el segmento $[a, b]$ la integración, pues en ambos casos cualquier suma integral de f tiene por expresión

$$\sigma_R = \sum_{j=0}^{n-1} f(\xi_j)\,\Delta x_j.$$

Sea dada una función f integrable en el segmento $[a, b]$. En este caso, cualquiera que sea x que satisfaga las desigualdades $a \leqslant x \leqslant b$, la función f será integrable también en el segmento $[a, x]$.

Esta afirmación requiere una demostración, no obstante no la daremos. En los casos concretos esta afirmación es, como regla, evidente. Por ejemplo, una función continua (monótona) en el segmento $[a, b]$ es, a su vez, continua (monótona) en $[a, x]$, y, por tanto, integrable en $[a, x]$.

Prefijemos un valor arbitrario de $x \in [a, b]$. Será de interés para nosotros la integral definida de f en el segmento $[a, x]$, la cual es una función de x. Designémosla mediante $F(x)$.

Así pues

$$F(x)=\int_a^x f(u)\,du. \tag{1}$$

Empleamos la letra u a título de variable de integración con el fin de distinguirla del límite superior de integración x.

En la fig. 77 viene expresada la gráfica de una función f, acotada y continua a trozos, que en el punto c tiene una discontinuidad. El número $F(x)$ para x dado se expresa en el dibujo a través de la figura $ABxa$. Al variar x en $[a, b]$ varía $F(x)$.

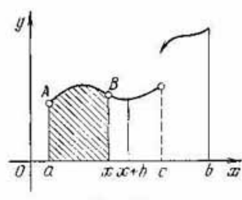


Fig. 77

TEOREMA 1. *Si una función f es integrable en el segmento $[a, b]$, la función F, definida según la fórmula (1), es continua en todo punto $x\in[a, b]$.*

Demostración. Prefijemos arbitrariamente un punto x y demos a este punto un incremento h (en la fig. 77 está expresado h positivo). Tenemos

$$|F(x+h)-F(x)|=\left|\int_a^{x+h} f(u)\,du-\int_a^x f(u)\,du\right|=\left|\int_x^{x+h} f(u)\,du\right|\leqslant M|h|$$

$$(M\geqslant |f(u)|,\quad \forall u\in[a, b]).$$

Hemos obtenido una desigualdad

$$|F(x+h)-F(x)|\leqslant M|h|,$$

de la cual se desprende que:

$$\lim_{h\to 0}[F(x+h)-F(x)]=0,$$

es decir, F es continua en el punto x.

Subrayemos que x puede ser tanto un punto de continuidad como un punto de discontinuidad de f, y, de todas formas, la función $F(x)$ queda continua en este punto.

TEOREMA 2. *Si una función f, integrable en $[a, b]$, es continua en el punto $x\in[a, b]$, entonces en dicho punto existe una derivada de F* (véase (1)):

$$F'(x)=f(x). \tag{2}$$

Demostración. Sea x un punto de discontinuidad de f. Tenemos

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(u)\,du-\int_a^x f(u)\,du\right]=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(u)\,du=$$

$$=\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\{f(x)+[f(u)-f(x)]\}\,du=\frac{1}{h}f(x)\,h+$$

$$+\frac{1}{h}\int_x^{x+h}[f(u)-f(x)]\,du=f(x)+\frac{1}{h}\int_x^{x+h}[f(u)-f(x)]\,du. \quad (3)$$

En el proceso de obtener (3) se han empleado las propiedades de la integral definida demostradas más arriba. En la cuarta igualdad se ha aprovechado el hecho de que $f(x)$ no depende de u, e integrando respecto de u se debe considerar $f(x)$ como un factor constante (véase el teorema 1 del § 6.2).

Demostremos que

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h}[f(u)-f(x)]\,du \xrightarrow[h\to 0]{} 0. \quad (4)$$

La función f es continua en el punto x, razón por la cual para cualquier $\varepsilon>0$ se puede indicar tal $\delta>0$ que si $|h|<\delta$, se tiene

$$|f(u)-f(x)|<\varepsilon, \quad \forall u\in[x,\ x+h].$$

Por lo tanto, para $|h|<\delta$ tenemos

$$\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}[f(u)-f(x)]\,du\right|\leqslant\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(u)-f(x)|\,du\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\varepsilon\,du\right|=\left|\frac{1}{h}\varepsilon h\right|=\varepsilon,$$

y hemos argumentado de este modo la propiedad (4).

De (3), pasando al límite para $h\to 0$, obtendremos a base de (4) que existe una derivada $F'(x)$ que vale

$$F'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x).$$

Con esto queda demostrado el teorema 2.

Fijémonos en que en el teorema 2, aunque se permitía que la función f fuese discontinua en el segmento $[a,\ b]$, no obstante, en el punto x, en el que se afirmaba la existencia de una derivada de F, se suponía que la función f era continua. De lo contrario, el teorema no sería, en el caso general, válido.

El teorema 2 afirma, en particular, que si $f(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, entonces $F(x)$ tiene derivada en dicho segmento igual a $f(x)$ ($F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$).

De este modo, *si la función f es continua en el segmento $[a, b]$, existe para ella una primitiva en dicho segmento. Además, a título de una de las primitivas podemos tomar la integral* (1).

De aquí se deduce que *la integral indefinida de una función f, continua en $[a, b]$, es igual a*

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(u)\,du + C, \quad x \in [a, b],$$

donde C es una constante

§ 6.4. Fórmula de Newton—Leibniz

La fórmula mencionada tiene la forma

$$\int_a^b f(u)\,du = \Phi(b) - \Phi(a) = \Phi(x)\,\Big|_{x=a}^{x=b}. \tag{1}$$

Aquí $f(u)$ es una función continua en el segmento $[a, b]$ y $\Phi(u)$ es una de sus primitivas en el mismo segmento.

La fórmula de Newton—Leibniz ya se ha demostrado en el § 6.1. En el párrafo mencionado se suponía conocido que una función f, continua en $[a, b]$, era integrable y tenía en el citado segmento una primitiva.

Ahora ya sabemos por el § 6.3 que la integrabilidad de una función continua en $[a, b]$ lleva consigo la existencia en $[a, b]$ de una primitiva para dicha función.

Demos a conocer otra demostración de la fórmula de Newton—Leibniz. Volveremos a la función

$$F(x) = \int_a^x f(u)\,du. \tag{2}$$

Observemos que

$$F(a) = \int_a^a f(u)\,du = 0 \ \text{ y } \ F(b) = \int_a^b f(u)\,du. \tag{3}$$

Además, sabemos que $F(x)$ es una primitiva para $f(x)$ en $[a, b]$. Por tanto, si $\Phi(x)$ es, en el caso general, alguna primitiva, existe una constante C tal que

$$\Phi(x) = F(x) + C, \quad \forall x \in [a, b]. \tag{4}$$

De (2), (3), (4) obtenemos

$$\Phi(b)-\Phi(a)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(u)\,du,$$

y queda demostrada la fórmula (1).

EJEMPLO 1.

$$\int_0^1 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{3}.$$

Esto prueba que el área (fig. 78) de la figura rayada que se dispone

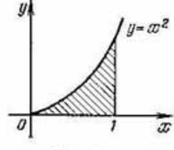


Fig. 78

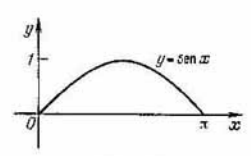


Fig. 79

por debajo de la parábola $y=x^2$, es igual a $1/3$.

EJEMPLO 2.

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx=-\cos x\,|_0^\pi=1+1=2.$$

De tal manera, el área de la figura (fig. 79) limitada superiormente por la sinusoide $y=\operatorname{sen} x$, y inferiormente, por el eje x es igual a 2.

EJEMPLO 3. La función

$$\varphi(x)=\operatorname{sign} x=\begin{cases}-1, & -1\leqslant x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & 0<x\leqslant 1,\end{cases}$$

es continua en el segmento $[-1, 1]$, a excepción del punto $x=0$. El segmento $[-1, 1]$ puede dividirse en dos: $[-1, 0]$ y $[0, 1]$, en los que la función es monótona y, por tanto, integrable. Por esta razón $\varphi(x)$ es integrable en $[-1, 1]$. Es válida la fórmula

$$F(x)=\int_{-1}^{x}\operatorname{sign} u\,du=-1+|x| \quad (-1\leqslant x\leqslant 1). \tag{5}$$

Efectivamente, en el semiintervalo $[-1, 0]$ la función $\varphi(x)$ es continua: $\varphi(x) = -1$. Su primitiva en dicho semiintervalo es igual a $-x$. Por eso, al aplicar la fórmula de Newton—Leibniz, obtenemos

$$\int_{-1}^{x} \operatorname{sign} u\, du = \int_{-1}^{x} (-1)\, du = -u \,|_{-1}^{x} = -1 - x \quad (-1 \leqslant x < 0). \tag{6}$$

En vista del teorema 1, $F(x)$ es continua, en particular, en el punto $x = 0$, por lo cual

$$F(0) = \lim_{x \to 0} (-1 - x) = -1. \tag{7}$$

Para $x > 0$

$$F(x) = \int_{-1}^{x} \operatorname{sign} u\, du = \int_{-1}^{0} \operatorname{sign} u\, du + \int_{0}^{x} 1 \cdot du = -1 + u \Big|_{0}^{x} = -1 + x. \tag{8}$$

De (6), (7), (8) proviene (5).

Una fórmula más elegante se obtendrá, si la integración se realiza a partir de $x = 0$:

$$\int_{0}^{x} \operatorname{sign} u\, du = |x|. \tag{9}$$

Bajo el signo de integral en (9) interviene una función acotada discontinua en el punto $x = 0$. La integral como función del límite superior $F(x) = |x|$, es una función continua, el punto $x = 0$ incluido, lo que concuerda con el teorema 1 del § 6.3. No obstante, la derivada $F'(0)$ no existe y esto no contradice el teorema 2 del § 6.3, el que garantiza la existencia de la derivada $F'(x)$, siempre que f sea continua en el punto x.

TEOREMA 1 (SOBRE EL CAMBIO DE VARIABLE). *Tiene lugar una igualdad*

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \int_{c}^{d} f[\varphi(t)]\, \varphi'(t)\, dt, \tag{10}$$

donde la función $\varphi(t)$ es continuamente derivable en $[c, d]$, $a = \varphi(c)$, $b = \varphi(d)$, mientras que $f(x)$ es continua en $[A, B] = \varphi([c, d])$, esto es en la imagen del segmento $[c, d]$ creada mediante la función φ.

Demostración. Sean $F(x)$ y $\Phi(t)$ unas funciones primitivas de $f(x)$ y $f[\varphi(t)]\, \varphi'(t)$, respectivamente. Entonces (véase el § 5.2, (1) y más abajo) resulta válida la identidad $\Phi(t) = F[\varphi(t)] +$

$+ C$, $c \leqslant t \leqslant d$, donde C es una constante. Por eso

$$F(b) - F(a) = F[\varphi(d)] - F[\varphi(c)] = \Phi(d) - \Phi(c). \quad (11)$$

Pero, en virtud de la fórmula de Newton—Leibniz, el primer miembro de (11) es igual al primer miembro de (10) y el segundo miembro de (11) es igual al segundo miembro de (10) y esto es lo que demuestra la fórmula (10).

EJEMPLO 4.

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = (x = a \operatorname{sen} t) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 t}\, a \cos t\, dt =$$

$$= a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt = \frac{a^2}{2}\left[t + \frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Observación. El límite superior de integración respecto de t puede tomarse igual a $5\pi/2$ y el resultado quedará el mismo, lo que concuerda con el teorema 1.

EJEMPLO 5.

$$\int_0^{4\pi} \operatorname{sen}^3 t\, dt = -\int_0^{4\pi} (1 - \cos^2 t)\, d(\cos t) = (x = \cos t) =$$

$$= -\int_1^1 (1 - x^2)\, dx = 0,$$

puesto que en la integral obtenida el límite inferior es igual al superior.

EJEMPLO 6. Si f es una función par $(f(-u) = f(u))$, entonces

$$\int_{-a}^{a} f(u)\, du = 2\int_0^a f(u)\, du,$$

puesto que

$$\int_{-a}^{0} f(u)\, du = (u = -x) = -\int_a^0 f(-x)\, dx = \int_0^a f(-x)\, dx =$$

$$= \int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a f(u)\, du.$$

EJEMPLO 7. Si f es una función impar $(f(-u) = -f(u))$, entonces

$$\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0.$$

EJEMPLO 8. Si f es una función periódica de período 2π ($f(x + 2\pi) = f(x)$), entonces

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x)\,dx = \int_{0}^{2\pi} f(x)\,dx,$$

porque

$$\int_{2\pi}^{2\pi+\alpha} f(x)\,dx = (x = t + 2\pi) = \int_{0}^{\alpha} f(t+2\pi)\,dt = \int_{0}^{\alpha} f(t)\,dt = -\int_{\alpha}^{0} f(t)\,dt.$$

y, por consiguiente,

$$\int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{2\pi} f(x)\,dx + \int_{2\pi}^{2\pi+\alpha} f(x)\,dx = \int_{0}^{2\pi} f(x)\,dx.$$

EJEMPLO 9.

$$\int_{0}^{3\pi} \operatorname{sen}^3 t\,dt = (x = \cos t) = -\int_{1}^{-1} (1-x^2)\,dx = \int_{-1}^{1} (1-x^2)\,dx =$$

$$= 2\int_{0}^{1} (1-x^2)\,dx = 2\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

EJEMPLO 10. Resolvamos el ejemplo 5, haciendo uso de los ejemplos 8, 7:

$$\int_{0}^{4\pi} \operatorname{sen}^3 t\,dt = \int_{0}^{2\pi} \operatorname{sen}^3 t\,dt + \int_{2\pi}^{4\pi} \operatorname{sen}^3 t\,dt = 2\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^3 t\,dt = 0,$$

ya que la función $\operatorname{sen}^3 t$ es impar.

TEOREMA 2. *Es válida la fórmula de integración por partes para la integral definida*

$$\int_{a}^{b} u'(x)\,v(x)\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_{a}^{b} u(x)\,v'(x)\,dx, \qquad (12)$$

donde u y v son funciones continuamente diferenciables en $[a, b]$.

Demostración. El producto $u(x)\,v(x)$ tiene en $[a, b]$ una derivada continua

$$(u(x)\,v(x))' = u(x)\,v'(x) + u'(x)\,v(x).$$

Por lo tanto, de conformidad con el teorema de Newton—Leibniz,

$$u(x)\,v(x)\Big|_a^b=\int_a^b [u(x)\,v'(x)+u'(x)\,v(x)]\,dx=$$

$$=\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx+\int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx,$$

de donde se deduce (12).

EJEMPLO 11.

$$\int_0^1 \ln(1+x)\,dx=(u=\ln(1+x),\ dv=dx)=$$

$$=x\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x\,dx}{1+x}=\ln 2-\int_0^1 1\,dx+\int_0^1\frac{dx}{x+1}=$$

$$=\ln 2-1+\ln(1+x)\Big|_0^1=-1+2\ln 2.$$

TEOREMA 3 (SOBRE EL VALOR MEDIO DE LA INTEGRAL DEFINIDA). *Para una función f, continua en el segmento $[a, b]$, existe tal punto $\xi\in(a, b)$ que*

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(\xi)\,(b-a). \tag{13}$$

Demostración. Puesto que f es continua, existe para ella una primitiva Φ, por lo tanto

$$\int_a^b f(x)\,dx=\Phi(b)-\Phi(a)=\Phi'(\xi)\,(b-a)=f(\xi)\,(b-a),$$

$$\xi\in(a, b). \tag{14}$$

La primera igualdad en (14) es la fórmula de Newton—Leibniz para la función continua en $[a, b]$ f. La segunda igualdad es la fórmula de Lagrange para Φ. Por fin, la tercera igualdad se desprende de que $\Phi'(x)=f(x)$, $\forall x\in[a, b]$.

§ 6.5. Resto de la fórmula de Taylor en la forma integral

Supongamos que la función $f(x)$ tiene derivadas continuas de orden hasta $n+1$ inclusive. Entonces, en virtud de la fórmula de Newton—Leibniz, tenemos

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\,dt=\left(\begin{matrix}u=f'(t)\\ dv=dt\end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix}du=f''(t)\,dt\\ v=t-x\end{matrix}\right)=$$

$$= f(a) + (t-x) f'(t) \Big|_{t=a}^{t=x} - \int_a^x (t-x) f''(t)\,dt = f(a) +$$

$$+ f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t) f''(t)\,dt =$$

$$= \left(\begin{matrix} u = f''(t) \\ (x-t)\,dt = dv \end{matrix} \middle| \begin{matrix} du = f'''(t)\,dt \\ v = -\frac{(x-t)^2}{2!} \end{matrix} \right) =$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \int_a^x f'''(t) \frac{(x-t)^2}{2!}\,dt.$$

Continuando el proceso de integración por partes, obtendremos

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + r_n(x), \qquad (1)$$

donde

$$r_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt. \qquad (2)$$

La fórmula (1), (2) *lleva el nombre de Taylor con resto en la forma integral.*

Al aplicar a la integral (2) (respecto de t) el teorema 3 (sobre el valor medio) del § 6.4, tendremos

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}(x-\xi)^n f^{(n+1)}(\xi)(x-a), \quad \xi \in (a, x).$$

Suponiendo

$$\xi = a + \theta(x-a), \quad 0 < \theta < 1,$$

obtenemos

$$r(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{n!}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(a + \theta(x-a)),$$

es decir, el término residual de la fórmula de Taylor en potencias de $x - a$ en forma de Cauchy (véase el § 4.14, (10)).

§ 6.6. Sumas de Darboux. Condiciones de la existencia de una integral

Supongamos que en un segmento $[a, b]$ está definida la función acotada f ($|f(x)| \leqslant M$). Introduzcamos una partición

$$R\colon\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Sea

$$m_i = \inf_{x \in [x_i,\, x_{i+1}]} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in [x_i,\, x_{i+1}]} f(x).$$

A la par con las sumas integrales

$$\sigma_R = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

examinemos las sumas siguientes

$$s_R = \sum_{i=0}^{n-1} m_i\,\Delta x_i, \quad S_R = \sum_{i=0}^{n-1} M_i\,\Delta x_i,$$

denominadas *sumas de Darboux inferior y superior*. Es evidente que $s_R \leqslant S_R$.

Las sumas de Darboux no son necesariamente integrales. Sin embargo, si $f(x)$ es una función continua, entonces s_R y S_R serán mínima y máxima, respectivamente, de las sumas integrales correspondientes a la partición dada, puesto que, de acuerdo con el teorema de Weierstrass, $f(x)$ alcanza su mínimo y máximo en cada segmento $[x_i, x_{i+1}]$, y por eso se pueden elegir los puntos ξ_i, $\xi_i' \in [x_i, x_{i+1}]$ de un modo tal que $f(\xi_i) = m_i$ y $f(\xi_i') = M_i$.

Por cuanto $m_i \leqslant f(x) \leqslant M_i$ y $\Delta x_i > 0$, entonces

$$s_R \leqslant \sigma_R \leqslant S_R. \tag{1}$$

Siendo fija la partición, s_R y S_R son unos números constantes, mientras que la suma integral σ_R queda variable por la arbitrariedad de los números ξ_i. Es fácil ver que a cuenta de la elección adecuada de los puntos ξ_i podemos hacer la suma σ_R tan próxima a s_R y S_R como se quiera, es decir, para una partición dada, s_R y S_R representan las cotas exactas inferior y superior para las sumas integrales:

$$s_R = \sum_{i=0}^{n-1} m_i\,\Delta x_i = \inf_{\xi_i} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i, \quad S_R = \sum_{i=0}^{n-1} M_i\,\Delta x_i = \sup_{\xi_i} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i.$$

Sean R_1, R_2, R_3 las particiones de $[a, b]$. Si todos los puntos de R_1 pertenecen a R_2, escribiremos $R_1 \subset R_2$ y diremos que R_2 es una prolongación de R_1. Si un conjunto de puntos, de los cuales se compone R_3, es una suma teórico-multiplicativa de los conjuntos de puntos, de los cuales constan R_1 y R_2, se escribirá $R_3 = R_1 + R_2$.

Propiedades de las sumas de Darboux:

1°. *Si a los puntos de división con los que cuenta la partición R se añaden algunos puntos nuevos, la suma de Darboux superior (S_R) no crece, y la inferior (s_R) no decrece:*

$$S_{R'} \leqslant S_R, \quad s_R \leqslant s_{R'}, \qquad \forall R \subset R'.$$

---

[1]) Darboux G. (1842—1917), un matemático francés.

De este modo,

$$S_{R'} - s_{R'} \leqslant S_R - s_R.$$

Demostración. Para demostrar la propiedad podemos, evidentemente, limitarnos con un caso en que se añade sólo un punto nuevo de división $x' \in \in (x_i, x_{i+1})$. Sea S_R la suma de Darboux superior para la partición R, y $S_{R'}$, para la partición R'. En este caso S_R se diferencia de $S_{R'}$ por lo que en lugar del sumando $M_i \Delta x_i$ en la suma $S_{R'}$ intervendrán dos sumandos:

$$M_i' (x' - x_i) + M_i'' (x_{i+1} - x'),$$

$$\text{donde } M_i' = \sup_{x \in [x_i, x']} f(x), \; M_i'' = \sup_{x \in [x', x_{i+1}]} f(x).$$

Por cuanto los segmentos $[x_i, x']$, $[x', x_{i+1}]$ forman parte de $[x_i, x_{i+1}]$, resulta que $M_i' \leqslant M_i$, $M_i'' \leqslant M_i$ (cuando se reduce el dominio de consideración, sup puede sólo disminuir). Por esta razón

$$M_i' (x' - x_i) + M_i'' (x_{i+1} - x') \leqslant M_i (x' - x_i + x_{i+1} - x') =$$
$$= M_i (x_{i+1} - x_i),$$

es decir, $S_{R'} \leqslant S_R$, lo que se trataba de demostrar.

Para las sumas inferiores la demostración es análoga.

2°. *Cada suma de Darboux inferior no es superior a cada suma de Darboux superior, incluso cuando la última corresponda a otra partición del segmento:* $s_{R_1} \leqslant S_{R_2}$.

Demostración. Sea $R_3 = R_1 + R_2$. Teniendo presente la propiedad 1°, obtenemos $s_{R_1} \leqslant s_{R_3} \leqslant S_{R_3} \leqslant S_{R_2}$.

Así pues, hemos demostrado que el conjunto de sumas de Darboux inferiores $\{s_R\}$ está acotado superiormente por cierta suma superior $S_{R'}$ ($s_R \leqslant S_{R'}$), por lo tanto *existe la cota superior exacta de las sumas inferiores*:

$$I_* = \sup_R s_R \leqslant S_{R'}.$$

En adición se ha demostrado también que toda suma superior $S_{R'}$ no es menos del número I_*. Esto muestra de que *existe la cota inferior exacta de las sumas superiores*

$$I^* = \inf_{R'} S_{R'} \geqslant I_*.$$

Por consiguiente, $I_* \leqslant I^*$. Con ello, para cualquier partición R se verifican las desigualdades

$$s_R \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S_R. \tag{2}$$

Los números I_*, I^* llevan el nombre de *integrales de Darboux inferior y superior.*

TEOREMA 1 (DE EXISTENCIA DE UNA INTEGRAL). *Para que exista la integral definida de una función acotada $f(x)$, es necesario y suficiente que se verifique*

$$\lim_{\lambda_R \to 0} (S_R - s_R) = \lim_{\lambda_R \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0, \tag{3}$$

donde el número $\omega_i = M_i - m_i$ se denomina oscilación de la función $f(x)$ en $[x_i, x_{i+1}]$.

Demostración. I. Necesidad de la condición. Admitamos que la integral definida I de la función $f(x)$ existe: es decir, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $I -$

$-\varepsilon < \sigma_R < I + \varepsilon$, en cuanto que $\lambda_R < \delta$, independientemente del modo de elegir los puntos $\varepsilon_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

Anteriormente fue establecido que s_R y S_R son, para R dada, las colas exactas inferior y superior para las sumas integrales σ_R, al variar los puntos $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Por eso

$$I - \varepsilon \leqslant s_R \leqslant \sigma_R \leqslant S_R \leqslant I + \varepsilon, \quad \forall R \text{ con } \lambda_R < \delta,$$

es decir,

$$\lim_{\lambda_R \to 0} s_R = I, \quad \lim_{\lambda_R \to 0} S_R = I$$

y

$$\lim_{\lambda_R \to 0} (S_R - s_R) = 0.$$

II. Suficiencia. Supongamos que la condición (3) está cumplida. En tal caso, de la desigualdad (2) se deduce que $I_* = I^*$. Designemos el valor común de estos dos números mediante I $(I_* = I^* = I)$. Entonces

$$s_R \leqslant I \leqslant S_R. \tag{4}$$

De (3) se infiere que para cualquier $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $|S_R - s_R| < \varepsilon$ para $\lambda_R < \delta$. Pero, en este caso, de (1) y (4) obtenemos

$$|I - \sigma_R| < \varepsilon \quad \text{para} \quad \lambda_R < \delta,$$

es decir, I es un límite para σ_R y $f(x)$ es integrable.

Observación. De la demostración del teorema se ve que si la función $f(x)$ es integrable en $[a, b]$, entonces $\lim\limits_{\lambda_R \to 0} s_R = \lim\limits_{\lambda_R \to 0} S_R = \int\limits_a^b f(x)\, dx$, y viceversa, si $\lim\limits_{\lambda_R \to 0} s_R = \lim\limits_{\lambda_R \to 0} S_R = I$, entonces $I = \int\limits_a^b f(x)\, dx$.

§ 6.7. Integrabilidad de las funciones continuas y monótonas

TEOREMA 1. *Si una función $f(x)$ es continua en $[a, b]$, será integrable en el segmento mencionado.*

Demostración. Ya que la función $f(x)$ es continua en $[a, b]$, será en dicho segmento uniformemente continua y, por consiguiente, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ tal que una vez dividido $[a, b]$ en partes con $\lambda_R < \delta$, todas las oscilaciones $\omega_i < \varepsilon$. De aquí

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \leqslant \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \varepsilon (b - a).$$

Por ser ε arbitrario, concluimos que $\lim\limits_{\lambda_R \to 0} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0$, y, conforme al teorema 1 del § 6.6, la función $f(x)$ es integrable.

TEOREMA 2. *Una función monótona en un segmento es integrable en él.*

Demostración. Convengamos en considerar, para concretar, que $f(x)$ no decrece y que, además, $f(a) < f(b)$, pues de lo contrario la función es constante y el teorema sería trivial.

Por cuanto $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$, $\forall x \in [a, b]$, nuestra función está acotada en $[a, b]$. Introduzcamos una partición R del segmento $[a, b]$ con $\lambda_R < \delta$. Ya que, en el caso dado, $\omega_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$, resulta

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \leqslant \delta \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i = \delta [f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) -$$

$$- f(x_1) + \ldots + f(x_n) - f(x_{n-1})] = \delta [f(b) - f(a)]$$

$x_0 = a$, $x_n = b$. Elijamos ahora $\delta = \varepsilon/[f(b) - f(a)]$, entonces

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \leqslant \varepsilon,$$

y, de acuerdo con el teorema de existencia (del 1 del § 6.6) concluimos que $f(x)$ es integrable. El teorema queda demostrado.

Observación. 1. Hemos de notar que una función monótona puede tener un conjunto numerable de puntos de discontinuidad. Por ejemplo, la función $y = \left\{x + \frac{1}{n}, \ \frac{1}{n+1} < x \leqslant \frac{1}{n}, \ n = 1, 2, \ldots\right\}$ es monótona creciente en $[0, 1]$, tiene un conjunto numerable de puntos de discontinuidad. Por consiguiente, según el teorema 2, es integrable.

Observación 2. Si $f(x)$ es integrable en $[a, b]$ $(a < b)$, entonces $|f(x)|$ es también integrable.

Efectivamente, $\forall x'$ y x'' de $[x_i, x_{i+1}]$ tenemos

$$||f(x')| - |f(x'')|| \leqslant |f(x') - f(x'')|. \tag{1}$$

Si ω_i^*, ω_i son las oscilaciones de $|f(x)|$ y de $f(x)$, respectivamente, en $[x_i, x_{i+1}]$, entonces de (1) proviene que $\omega_i^* \leqslant \omega_i$, y

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i^* \Delta x_i \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i.$$

Ya que $f(x)$ es integrable, tenemos

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \to 0 \text{ cuando } \lambda_R \to 0.$$

Pero, en este caso,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i^* \Delta x_i \to 0,$$

y, por ende, $|f(x)|$ es integrable.

§ 6.8. Integrales impropias

Definamos en un semiintervalo finito $[a, b)$ una función f. Admitamos que esta función es integrable (por ejemplo, continua o continua a trozos) en cualquier segmento $[a, b']$, donde $b' < b$,

y no está acotada en un entorno del punto b. En dichas condiciones su integral en $[a, b)$ o bien, que es lo mismo, en $[a, b]$ no puede existir en el sentido habitual (de Riemann), puesto que una función integrable en $[a, b]$ según Riemann está forzosamente acotada. No obstante, puede suceder que exista un límite finito

$$\lim_{b'\to b} \int_a^{b'} f(x)\,dx.$$

Si esto es cierto, el límite citado se denomina *integral impropia de f en el segmento $[a, b]$* y se escribe en la forma

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b'\to b} \int_a^{b'} f(x)\,dx. \tag{1}$$

En este caso suele decirse que *la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ converge.* En el caso contrario se dice que la integral *diverge* o no existe como integral impropia de Riemann.

Admitamos ahora que la función f viene dada en un rayo $[a, \infty)$ y es integrable en cualquier segmento finito $[a, b']$, donde $a < b' < \infty$. Si existe el límite

$$\lim_{b'\to\infty} \int_a^{b'} f(x)\,dx,$$

se llamará *integral impropia de f en $[a, \infty)$* y se designará así:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b'\to\infty} \int_a^{b'} f(x)\,dx.$$

Convengamos en usar la siguiente terminología. La expresión

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{2}$$

se llamará *integral (de f) con la única singularidad en el punto b*, si se cumplen las condiciones siguientes: si b es un punto terminal, la función f será integrable en $[a, b']$ con b' cualquiera que satisfaga las desigualdades $a < b' < b$, y, además, no está acotada en el entorno del punto b. Si, en cambio, $b = +\infty$, entonces acerca de la función f se supone sólo que es integrable en $[a, b']$ para cualquier $b' > a$ finito.

De un modo semejante se entiende la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ con la única singularidad en el punto a. Ahora, b es un punto terminal. Si el punto $a < b$ es también finito, entonces f no está acotada en el entorno de a y es integrable en cualquier segmento $[a', b]$, donde $a < a' < b$. Si, en cambio, $a = -\infty$, la función f se supone integrable en $[a', b]$ para cualquier $a' < b$.

En adelante se analizará, para concretar, la integral (2) con la única singularidad en el punto b, sea éste finito o infinito. Todas las deducciones pueden extenderse por analogía al caso de una integral con la única singularidad en el punto a.

TEOREMA. *Sea dada una integral* (2) *con la única singularidad en el punto* b. *Para su existencia es necesario y suficiente el cumplimiento de la condición (de Cauchy): para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $b_0 < b$ *tal que*

$$\left| \int_{b'}^{b''} f(t)\,dt \right| < \varepsilon, \tag{3}$$

cualesquiera que sean b', b'' *que satisfagan las desigualdades* $b_0 < b' < b'' < b$.

Demostración. Examinemos una función

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad (a < x < b).$$

La existencia de la integral (2) es equivalente a la existencia del límite $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} F(x)$, lo que, a su vez, es equivalente al cumplimiento de la condición de Cauchy: para todo $\varepsilon > 0$ existe b_0, donde $a < b_0 < b$, tal que se cumple la desigualdad $|F(b'') - F(b')| < \varepsilon$ para todos los b' y b'' que satisfagan las desigualdades $b_0 < b' < b'' < b$. Pero,

$$F(b'') - F(b') = \int_{b'}^{b''} f(t)\,dt,$$

y el teorema queda demostrado.

EJEMPLO 1. Una integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \tag{4}$$

donde $\alpha > 0$ es un número constante, tiene, obviamente, una única singularidad en el punto $x = 0$. Para enterarse de si es convergente

o no, se debe calcular el límite

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_{\varepsilon}^{1} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{1-\alpha}[1-\varepsilon^{1-\alpha}] = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}, & \alpha<1 \\ \infty, & \alpha>1. \end{cases}$$

De este modo, la integral (4) converge para $\alpha < 1$ y es igual a $(1 - \alpha)^{-1}$; la integral diverge para $\alpha > 1$. Si $\alpha = 1$, la integral diverge:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} = -\lim_{\varepsilon\to 0} \ln \varepsilon = +\infty.$$

EJEMPLO 2. La integral

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{N\to\infty} \int_{1}^{N} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{N\to\infty} x^{1-\alpha}\Big|_{1}^{N} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1}, & \alpha>1 \text{ (converge)}, \\ +\infty, & \alpha<1 \text{ (diverge)}, \end{cases}$$

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{N\to\infty} \int_{1}^{N} \frac{dx}{x} = \lim_{N\to\infty} \ln N = +\infty \text{ (diverge)}.$$

EJEMPLO 3. La integral $\int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx$ tiene una única singularidad en el punto $x = +\infty$. Ella converge y es igual a

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{N\to+\infty} \int_{0}^{N} e^{-x}\,dx = \lim_{N\to+\infty} (-e^{-x})\Big|_{0}^{N} = \lim_{N\to+\infty} [1-e^{-N}] = 1.$$

Sea prefijada otra vez la integral

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \tag{5}$$

que tiene una única singularidad en el punto b. En este caso la integral

$$\int_{c}^{b} f(x)\,dx, \tag{6}$$

donde $a < c < b$, tiene también una única singularidad en el punto b. La condición de Cauchy para la existencia de las integrales (5) y (6) se enuncia sumamente igual. Por lo tanto estas integrales convergen simultáneamente o divergen simultánemamante. Además,

cuando $a < c < b$, tiene lugar, evidentemente:

$$\int_a^b f\,dx = \lim_{b' \to b} \int_a^{b'} f\,dx = \lim_{b' \to b} \left(\int_a^c f\,dx + \int_c^{b'} f\,dx \right) =$$

$$= \int_a^c f\,dx + \lim_{b' \to b} \int_c^{b'} f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx, \quad (7)$$

donde $\int_a^c$ es una integral propia corriente de Riemann y las integrales $\int_a^b$ y $\int_c^b$ son impropias.

He aquí una igualdad

$$\int_a^b (Af + B\varphi)\,dx = \lim_{b' \to b} \int_c^{b'} (Af + B\varphi)\,dx =$$

$$= A \lim_{b' \to b} \int_a^{b'} f\,dx + B \lim_{b' \to b} \int_a^{b'} \varphi\,dx = A \int_a^b f\,dx + B \int_a^b \varphi\,dx, \quad (8)$$

donde A y B son constantes. Esta igualdad se debe entender en el sentido de que si existen las integrales en el miembro derecho, también existe la integral en el miembro izquierdo y tiene lugar la igualdad (8).

Dicen que la integral (5) (que tiene una singularidad en el punto b) *converge absolutamente*, si converge la integral

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \quad (9)$$

del valor absoluto $|f(x)|$.

Una integral absolutamente convergente converge. En efecto, de lo que la integral (9) converge se desprende que para todo $\varepsilon > 0$ en el intervalo (a, b) existe un punto b_0 tal que si $b_0 < b' < b'' < b$, entonces

$$\varepsilon > \int_{b'}^{b''} |f(x)|\,dx \geqslant \left| \int_{b'}^{b''} f(x)\,dx \right|,$$

es decir, para la integral (5) se cumple la condición de Cauchy. Puesto que

$$\left| \int_a^{b'} f(x)\,dx \right| \leqslant \int_a^{b'} |f(x)|\,dx,$$

pasando al límite para $b' \to b$, para la integral absolutamente convergente (5) obtendremos

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx. \qquad (10)$$

Observación. La desigualdad (10) es lícita también para una integral que no sea absolutamente convergente: en este caso a la derecha figura el símbolo ∞ el cual se considera mayor que todo número finito. Esta circunstancia es de amplio uso en la técnica de los cálculos. Si se requiere enterarse de si es convergente o no la integral $\int_a^b f\, dx$, escribimos la desigualdad (10) y analizamos la convergencia de la integral $\int_a^b |f|\, dx$. Si ésta última converge, es decir, si $\int_a^b |f|\, dx < \infty$, entonces converge también nuestra integral $\int_a^b f\, dx$. Por supuesto, si $\int_a^b |f|\, dx = \infty$, tendremos que aplicar a nuestra integral los métodos más finos. Es posible que a pesar de todo ella converge, pero no absolutamente (véanse los ejemplos al final del § 6.9).

§ 6.9. Integrales impropias de las funciones no negativas

Sea dada una integral

$$\int_a^b f(x)\, dx, \qquad (1)$$

que tiene una única singularidad en el punto b, y sea $f(x) \geqslant 0$ en el intervalo de integración $[a, b)$. Entonces, evidentemente, la función

$$F(b') = \int_a^{b'} f(x)\, dx \quad (a < b' < b)$$

de b' no es monótona decreciente. Por eso, si dicha función está acotada ($F(b') \leqslant M$, $a < b' < b$), existe la integral (1)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b' \to b} \int_a^{b'} f(x)\,dx \leqslant M.$$

En cambio, si F no está acotada, la integral (1) diverge:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b' \to b} \int_a^{b'} f(x)\,dx = +\infty.$$

Si $f(x) \geqslant 0$ en $[a, b)$, se escribe

$$\int_a^b f(x)\,dx < \infty, \text{ o bien } \int_a^b f(x)\,dx = \infty,$$

según sea la integral convergente o divergente.

TEOREMA 1. *Supongamos que las integrales*

$$\int_a^b f(x)\,dx, \tag{1}$$

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \tag{2}$$

tienen una única singularidad en el punto b y que en el intervalo $[a, b)$ se verifican las desigualdades

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x). \tag{3}$$

Entonces, de lo que la integral (2) converge deduce la convergencia de la integral (1) y tiene lugar la desigualdad

$$\int_a^b f\,dx \leqslant \int_a^b \varphi\,dx,$$

y de la divergencia de la integral (1) se desprende la divergencia de la integral (2).

Demostración. De (3) se deduce que para $a < b' < b$

$$\int_a^{b'} f\,dx \leqslant \int_a^{b'} \varphi\,dx. \tag{4}$$

Ahora, si la integral (2) converge, el segundo miembro de (4) estará acotado por un número igual a la integral (2) y en este caso estará

acotado también el miembro primero. Y, como el primer miembro no decrece monótonamente cuando crece b', entonces tiende, pues, a un límite (una integral):

$$\int_a^b f\,dx = \lim_{b' \to b} \int_a^{b'} f\,dx \leqslant \int_a^b \varphi\,dx.$$

Viceversa, de la divergencia de la integral (1) proviene que el límite del primer miembro en (4) es igual, para $b' \to b$, a ∞, y, por lo tanto, el límite del segundo miembro es también igual a ∞.

TEOREMA 2. *Supongamos que las integrales (1) y (2) tienen una única singularidad en el punto b, con la particularidad de que las funciones subintegrales son positivas y existe un límite*

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A > 0. \tag{5}$$

En tal caso dichas integrales son convergentes o no lo son simultáneamente.

Demostración. De (5) se deduce que para $\varepsilon < A$ positivo se puede escoger tal $c \in [a, b)$ que

$$A - \varepsilon < \frac{f(x)}{\varphi(x)} < A + \varepsilon \quad (c < x < b),$$

y, como $\varphi(x) > 0$, entonces

$$(A - \varepsilon)\,\varphi(x) < f(x) < (A + \varepsilon)\,\varphi(x) \quad (c < x < b). \tag{6}$$

De la convergencia de la integral $\int_a^b \varphi\,dx$, se deduce la convergencia de la integral $\int_c^b \varphi\,dx$, como también la de la integral $\int_c^b (A+\varepsilon)\,\varphi\,dx$; pero, en este caso converge también, de conformidad con el teorema anterior, la integral $\int_c^b f\,dx$, y, junto con ésta, la integral $\int_a^b f\,dx$. Viceversa, de la convergencia de $\int_a^b f\,dx$ se desprende la convergencia de $\int_c^b \varphi\,dx$, porque a la par con (5) tiene lugar la igualdad

$$\lim_{x \to b} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{1}{A} > 0.$$

Observación. La igualdad (5) significa que la función f es equivalente a la función $A\varphi$ cuando $x \to b$. En este caso se dice también que las funciones f y φ son de igual orden para $x \to b$.

EJEMPLO 1. Analícese la convergencia de la integral

$$\int_0^\infty \operatorname{sen} kx e^{-x}\, dx.$$

Tenemos

$$\left|\int_0^\infty e^{-x} \operatorname{sen} kx\, dx\right| \leqslant \int_0^\infty |e^{-x} \operatorname{sen} kx|\, dx \leqslant \int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1 < \infty.$$

Hemos empleado aquí la desigualdad (10) del § 6.8 y la observación para dicha desigualdad.

Mediante el signo $\sim$ interpuesto entre las integrales se denotará el hecho de que dichas integrales son, en virtud del teorema 2, o bien simultáneamente convergentes o bien simultáneamente divergentes.

EJEMPLO 2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{sen} x} \sim \int_0^1 \frac{dx}{x} = \infty.$

EJEMPLO 3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{sen} \sqrt{x}} \sim \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} < \infty.$

EJEMPLO 4. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x-1}{x} e^{-x}\, dx \sim \int_1^\infty e^{-x}\, dx < \infty.$

Las integrales en los ejemplos 2 y 3 tienen una única singularidad en el punto $x = 0$. Se debe tomar en consideración que $\operatorname{sen} x \approx x$, $\operatorname{sen} \sqrt{x} \approx \sqrt{x}$, $x \to 0$.

La integral del ejemplo 4 tiene la única singularidad en $x = \infty$. Se debe tomar en consideración que $\frac{x-1}{x} e^{-x} \approx e^{-x}$, $x \to +\infty$.

EJEMPLO 5. $\displaystyle\int_0^\infty (x^2 - 3x + 5) e^{-x}\, dx$ converge, puesto que

$$\left|\int_0^\infty (x^2 - 3x + 5) e^{-x}\, dx\right| \leqslant \int_0^\infty |(x^2 - 3x + 5) e^{-x/2}| e^{-x/2}\, dx \leqslant$$

$$\leqslant M \int_0^\infty e^{-x/2}\, dx < \infty.$$

El hecho es que $\lim\limits_{x\to\infty} (x^2 - 3x + 5)\, e^{-x/2} = 0$, razón por la cual existe un $N > 0$ tal que $|(x^2 - 3x + 5)\, e^{-x/2}| < 1$, $\forall\, x > N$.

Por otra parte, la función $|(x^2 - 3x + 5)\, e^{-x/2}|$ es continua en $[0, N]$, por consiguiente, está acotada en $[0, N]$ con cierto número M_1. De este modo, queda acotada en $[0, \infty)$ por un número $M = \text{máx}\, \{1, M_1\}$.

§ 6.10. Integración por partes de las integrales impropias

EJEMPLO 1. Las integrales impropias

$$\int\limits_a^\infty \frac{\text{sen}\, x}{x}\, dx, \quad \int\limits_a^\infty \frac{\cos x}{x}\, dx \quad (a > 0) \tag{1}$$

convergen. En efecto, integrando por partes, obtendremos

$$\int\limits_a^A \frac{\text{sen}\, x}{x}\, dx = -\frac{\cos x}{x}\Big|_a^A - \int\limits_a^A \frac{\cos x}{x^2}\, dx$$

para todos los $A > a$ finitos. Pasando ahora al límite para $A \to \infty$, obtendremos

$$\int\limits_a^\infty \frac{\text{sen}\, x}{x}\, dx = \frac{\cos a}{a} - \int\limits_a^\infty \frac{\cos x}{x^2}\, dx,$$

donde la integral en el segundo miembro converge e incluso absolutamente:

$$\left|\int\limits_a^\infty \frac{\cos x}{x^2}\, dx\right| \leqslant \int\limits_a^\infty \frac{|\cos x|}{x^2}\, dx \leqslant \int\limits_a^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a} < \infty.$$

EJEMPLO 2. La integral $\int\limits_a^\infty \frac{\text{sen}\, x}{x}\, dx$ converge no absolutamente (convencionalmente), pues la integral

$$\int\limits_a^\infty \frac{|\text{sen}\, x|}{x}\, dx = \infty, \quad a > 0, \tag{2}$$

es decir, es divergente. En efecto, en virtud de la desigualdad $\operatorname{sen}^2 x \leqslant |\operatorname{sen} x|$, la integral impropia

$$\int_a^\infty \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\,dx \geqslant \int_a^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x}\,dx = \int_a^\infty \frac{1-\cos 2x}{2x}\,dx =$$

$$= (2x = u) = \frac{1}{2}\int_{2a}^\infty \frac{1-\cos u}{u}\,du = \frac{1}{2}\int_{2a}^\infty \frac{du}{u} - \frac{1}{2}\int_{2a}^\infty \frac{\cos u}{u}\,du$$

Pero la integral $\int_{2a}^\infty u^{-1}\cos u\,du$ converge, mientras que la integral $\int_{2a}^\infty u^{-1}\,du$ diverge. Por consiguiente, la integral impropia (2) es divergente.

Observación. La convergencia de la integral (1) se debe a que la función $\operatorname{sen} x$ es periódicamente oscilante y toma sucesivamente los valores positivos y negativos. La acumulación del área causada por los valores positivos de $\operatorname{sen} x$ se compensa por la acumulación correspondiente proporcionada por los valores negativos.

Este fenómeno se explicará en la teoría de las series (véase la serie de Leibniz y las series convergentes convencionalmente).

Los ejemplos aducidos muestran que la integración por partes puede servir de medio útil en la investigación de la convergencia de las integrales impropias.

Más abajo vienen los razonamientos generales que explican mejor el mecanismo de este método.

Supongamos que la función $\varphi(x)$ es continua en $[a, \infty)$ y $\Phi(x)$ es su primitiva. Supongamos también que $g(x)$ es una función continuamente diferenciable en $[a, b)$. Entonces

$$\int_a^A \varphi(x)\,g(x)\,dx = g(x)\,\Phi(x)\Big|_a^A - \int_a^A \Phi(x)\,g'(x)\,dx =$$

$$= g(A)\,\Phi(A) - g(a)\,\Phi(a) - \int_a^A \Phi(x)\,g'(x)\,dx. \qquad (3)$$

Si

1) $\lim\limits_{A\to\infty} g(A)\,\Phi(A) = 0$,

2) la integral $\int_a^\infty \Phi(x)\,g'(x)\,dx$ converge, entonces, evidentemente, existe

una integral impropia

$$\int_a^\infty \varphi(x) g(x)\,dx = \lim_{A\to\infty} \int_a^A \varphi(x) g(x)\,dx = -g(a)\,\Phi(a) - \int_a^\infty \Phi(x) g'(x)\,dx. \qquad (4)$$

De aquí se deduce, en particular.

CRITERIO DE DIRICHLET DE CONVERGENCIA DE LA INTEGRAL (4). Si la función $\Phi(x)$ está acotada ($\Phi(x) \leqslant M$), en tanto que $g(x)$ decrece y tiende hacia cero cuando $x \to \infty$, entonces la integral (4) es convergente.

Está claro que estas condiciones implican la propiedad 1). Luego

$$\left| \int_a^\infty \Phi(x) g'(x)\,dx \right| \leqslant \int_a^\infty |\Phi(x) g'(x)|\,dx \leqslant M \int_a^\infty |g'(x)|\,dx =$$

$$= -M \int_a^\infty g'(x)\,dx = -M \lim_{A\to\infty} \int_a^A g'(x)\,dx = -M \lim_{A\to\infty} [g(A) - g(a)] = g(a)\cdot M.$$

EJEMPLO 3. La integral

$$\int_a^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha}\,dx \quad (\alpha > 0),$$

que tiene una única singularidad en $x = \infty$, converge para $\alpha > 0$. Esto se infiere del criterio de Dirichlet, donde se debe considerar que $g(x) = x^{-\alpha}$ y $\varphi(x) = \operatorname{sen} x$, $\Phi(x) = -\cos x$ ($|\Phi(x)| \leqslant 1$). Es absolutamente convergente sólo para $\alpha > 1$, lo que se demuestra igual que en el ejemplo 2 del § 6.9.

§ 6.11. Integral impropia con singularidades en varios puntos

Sea prefijada una integral

$$\int_a^b f(x)\,dx, \qquad (1)$$

o sea, una expresión formal por ahora, donde bajo el signo de integral $\int_a^b$ figura la función $f(x)$ definida en el intervalo (a, b). De este modo, a puede representar un número finito o $-\infty$, y b, un número finito o $+\infty$.

Supongamos que el intervalo (a, b) puede ser partido en un número finito de intervalos mediante los puntos $a = c_0 < c_1 <$

$< c_2 < \ldots < c_N = b$ de un modo tal que cada intervalo

$$\int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)\,dx \quad (k=0, 1, \ldots, N-1) \tag{2}$$

tenga la única singularidad o bien en el punto c_k o bien en el punto c_{k+1}.

Si todas las integrales impropias (2) convergen (convergen absolutamente), la integral (1) recibe el nombre de *impropia convergente* (*absolutamente convergente*) y al símbolo (1) se le asigna el número

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{c_k}^{c_{k+1}} f(x)\,dx.$$

Pero, si al menos una de las integrales (2) diverge, la integral (1) se considera divergente.

Si $f(x) \geqslant 0$, entonces, al igual que en el caso de integrales con una sola singularidad, para la integral (1) se escribe

$$\int_a^b f(x)\,dx < \infty,$$

si es convergente, y

$$\int_a^b f(x)\,dx = \infty,$$

si la integral citada diverge.

EJEMPLO 1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-x}\,dx + \int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \infty + 1 = \infty.$$

Esta integral tiene dos singularidades: en el punto $x = -\infty$ y en $x = \infty = +\infty$. Correspondientemente, la hemos representado formalmente como una suma de dos integrales, cada una de las cuales tiene una de las singularidades mencionadas. Es evidente que

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x}\,dx = \infty, \quad \int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = 1.$$

Aquí nos hemos permitido considerar que $\infty \pm 1 = \infty$.

EJEMPLO 2. $(\alpha > 0)$

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^{\alpha}}\,dx \begin{cases} \text{converge convencionalmente para } 0 < \alpha \leqslant 1, \\ \text{converge absolutamente para } 1 < \alpha < 2, \\ \text{diverge para } \alpha \geqslant 2. \end{cases} \tag{3}$$

En efecto, esta integral tiene dos singularidades: en $x = 0$ y en $x = \infty$, por lo cual con el fin de analizarla examinemos una suma formal

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha}\,dx = \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha}\,dx + \int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha}\,dx.$$

Bajo la integral $\int_0^1$ figura una función positiva, razón por la cual dicha integral o bien diverge o bien, si converge, es absolutamente convergente. Para su investigación nos serán útiles las desigualdades (véanse el § 3.3, (6) y el § 4.19, ejemplo 1)

$$\frac{2}{\pi} x^{1-\alpha} \leqslant \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha} \leqslant x^{1-\alpha} \quad (0 < x \leqslant 1),$$

de donde

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha}\,dx \leqslant \int_0^1 x^{1-\alpha}\,dx < \infty \quad \text{para } \alpha < 2,$$

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha}\,dx \geqslant \frac{2}{\pi} \int_0^1 x^{1-\alpha}\,dx = \infty \quad \text{para } \alpha \geqslant 2.$$

Por consiguiente,

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha}\,dx \begin{cases} \text{converge absolutamente para } \alpha < 2, \\ \text{diverge para } \alpha \geqslant 2. \end{cases} \tag{4}$$

Luego (véase el § 6.10), ejemplo 2)

$$\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha}\,dx \begin{cases} \text{converge para } \alpha > 0, \\ \text{converge absolutamente sólo para } \alpha > 1. \end{cases} \tag{5}$$

Capítulo 7

Aplicaciones de las integrales. Métodos aproximados

§ 7.1. Area en las coordenadas polares

El área S de una figura limitada por dos rayos $\theta = \theta_0$, $\theta = \theta_*$, que tienen por origen el polo polar O, y una curva Γ definida en coordenadas polares mediante la función continua $\rho = f(\theta)$, puede

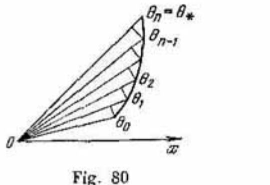


Fig. 80

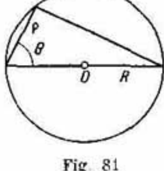


Fig. 81

determinarse del modo siguiente (fig. 80). Realicemos la partición del segmento $[\theta_0, \theta_*]$:

$$\theta_0 < \theta_1 \ldots < \theta_n = \theta_*.$$

Un elemento de área de una figura limitada por la curva Γ y los rayos $\theta = \theta_k$, $\theta = \theta_{k+1}$ se expresará aproximadamente por el área del sector circular limitado por los mismos rayos y la circunferencia de radio $\rho_k = f(\theta_k)$ y dicha area es igual a

$$\frac{1}{2}\rho_k^2\Delta\theta_k, \quad \Delta\theta_k = \theta_{k+1} - \theta_k.$$

Resulta natural considerar que, por definición,

$$S = \lim_{\text{máx}\,\Delta\theta_k \to 0} \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \rho_k^2\Delta\theta_k = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_*} \rho^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_*} f^2(\theta)\,d\theta. \qquad (1)$$

Se ha obtenido, pues, la fórmula para el área de una figura en coordenadas polares. Para una función continua $f(\theta)$ la integral (1), como ya lo sabemos, existe y, por ende, el límite de cualquier suma integral es igual a esta integral.

EJEMPLO. Una circunferencia expuesta en la fig. 81 se define en coordenadas polares mediante la ecuación $\rho = 2R\cos\theta$. En vista de (1), el área de un círculo vale

$$S = 2R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta = 4R^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \pi R^2.$$

§ 7.2. Volumen de un cuerpo de revolución

Sea Γ una curva descrita en el sistema rectangular de coordenadas x, y por una función positiva continua $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$. Calculemos el volumen V de un cuerpo de revolución limitado por los planos $x = a$, $x = b$ y la superficie engendrada por la de revolución de la curva Γ alrededor del eje x.

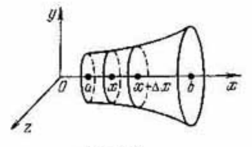


Fig. 82

Realicemos la partición del segmento $[a, b]$ en partes: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, y consideremos que un elemento ΔV del volumen del cuerpo limitado por los planos $x = x_k$, $x = x_{k+1}$ es aproximadamente igual al volumen del cilindro de altura $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ y radio $y_k = f(x_k)$:

$$\Delta V_k \sim \pi y_k^2 \Delta x_k = \pi f(x_k)^2 \Delta x_k.$$

La magnitud $V_n = \pi \sum_{k=0}^{n-1} f^2(x_k)\Delta x_k$ expresa aproximadamente V y

$$V = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \pi \sum_{k=0}^{n-1} f^2(x_k)\Delta x_k = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx. \qquad (1)$$

Se ha obtenido la fórmula para el volumen de un cuerpo de revolución (fig. 82).

EJEMPLO. Un elipsoide de revolución (alrededor del eje x)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2+z^2}{b^2} \leqslant 1$$

es un cuerpo limitado por la superficie de revolución de una curva

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \qquad (-a \leqslant x \leqslant a)$$

alrededor del eje x, por lo tanto, en virtud de la fórmula (1), su volumen es

$$V = \pi b^2 \int_{-a}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi b^2 \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Big|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi a b^2.$$

§ 7.3. Curva suave en un espacio. Longitud de un arco

En el § 4.21 se ha introducido el concepto de curva continua plana definida paramétricamente, en particular, el de curva suave.

Nuestro deseo es complementar los conocimientos mencionados. Al mismo tiempo examinaremos en el espacio una curva más general. Tres ecuaciones (fig. 83)

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \\ z=\chi(t), \end{array}\right\} a \leqslant t \leqslant b, \tag{1}$$

donde las funciones φ, ψ, χ son continuas en $[a, b]$, definen *una curva continua* que se designará mediante Γ. Si, además, dichas funciones φ, ψ, χ no sólo son continuas, sino tienen en $[a, b]$ derivadas continuas que no se anulan simultáneamente, entonces Γ recibe el nombre de *curva suave*.

Fig. 83

El hecho de que las derivadas $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$ no se anulan simultáneamente, cualquiera que sea el valor de $t \in [a, b]$, puede expresarse así: tiene lugar la desigualdad

$$(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2 > 0 \tag{2}$$

para todos los $t \in [a, b]$.

Si prefijamos un valor determinado de $t = t_0$, entonces, en virtud de (2), uno de los sumandos $\varphi'(t_0)$, $\psi'(t_0)$, $\chi'(t_0)$ — sea el primero— no será igual a cero ($\varphi'(t_0) \neq 0$). A consecuencia de que φ' es continua, existe un intervalo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, en el cual $\varphi'(t)$ es del mismo signo que tiene $\varphi'(t_0)$. Pero, en este caso, en dicho intervalo la función $x = \varphi(t)$ es estríctamente monótona y existe una función continuamente diferenciable inversa de la función $t = \varphi^{-1}(x)$, $x \in (c, d)$, donde (c, d) es cierto entorno del punto $x_0 = \varphi(t_0)$. De resultas llegamos a que cierto trozo pequeño γ de la curva Γ, en el que está contenido el punto $A_0 = (\varphi(t_0), \psi(t_0), \chi(t_0))$, se describe por dos funciones de x continuamente diferenciables:

$$y = \psi[\varphi^{-1}(x)] = \psi_1(x),$$
$$z = \chi[\varphi^{-1}(x)] = \chi_1(x)$$

($c < x < d$, $c < x_0 < d$, $x_0 = \varphi(t_0)$). Si, de hecho, $\psi'(t_0) \neq 0$, ó $\chi'(t_0) \neq 0$, entonces, razonando de un modo semejante, llegamos a que un cierto trozo $\gamma \subset \Gamma$ se escribe mediante las ecuaciones

$$x = \varphi_1(y), \quad z = \chi_1(y)$$
$$(\lambda < y < \mu, \ \lambda < y_0 < \mu, \ y_0 = \psi(t_0))$$

o bien, correspondientemente,

$$x = \varphi_1(z), \quad y = \psi_1(z)$$
$$(p < z < q,\ p < z_0 < q,\ z_0 = \chi(t_0)).$$

Las ecuaciones (1) de la curva suave Γ no sólo definen Γ (como un lugar geométrico de puntos $(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$, $t \in [a, b]$), sino determinan, además, la *orientación* de Γ, es decir, la dirección, a lo largo de la cual crece el parámetro t. En la fig. 83 viene expuesta una curva suave Γ, correspondiente a la variación del parámetro t en el segmento $[a, b]$ $(a < b)$: $A = (\varphi(a), \psi(a), \chi(a))$ es el punto inicial de Γ, $B = (\varphi(b), \psi(b), \chi(b))$ es el punto final de Γ, y la flecha indica la orientación de Γ.

Cuando el parámetro t crece continuamente desde a hasta b, el punto $(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$ se desplaza continuamente a lo largo de Γ a partir del punto inicial $A = (\varphi(a), \psi(a), \chi(a))$ hasta el punto final $B = (\varphi(b), \psi(b), \chi(b))$. El punto móvil puede retornar a la posición de partida, es decir, puede suceder que $t_1, t_2 \in [a, b]$, $t_1 < t_2$ y $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$, $\psi(t_1) = \psi(t_2)$, $\chi(t_1) = \chi(t_2)$; en este caso dicen que la curva Γ *se interseca*. La curva Γ se denomina *cerrada*, si coinciden los puntos A y B.

Introduzcamos una función $t = \lambda(\tau)$, $c \leqslant \tau \leqslant d$, que tiene en $[c, d]$ una derivada continua distinta de cero y que aplica $[c, d]$ sobre $[a, b]$. Puesto que $\lambda'(\tau)$ no cambia de signo en $[c, d]$, pueden haber sólo dos casos:

1) $\lambda'(\tau) > 0$, y en tal caso $\lambda(c) = a$, $\lambda(d) = b$,

2) $\lambda'(\tau) < 0$, y en tal caso $\lambda(c) = b$, $\lambda(d) = a$.

Nuestra curva suave Γ puede ser definida mediante las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi[\lambda(\tau)] = \varphi_1(\tau), \\ y &= \psi[\lambda(\tau)] = \psi_1(\tau), \\ z &= \chi[\lambda(\tau)] = \chi_1(\tau) \end{aligned}\right\} \qquad (1')$$

con ayuda del parámetro τ $(c \leqslant \tau \leqslant d)$. Una misma curva Γ puede definirse en forma paramétrica mediante diferentes parámetros $t, \tau, \ldots$.

Ha de ser notado que las condiciones (2) quedan en vigor en el lenguaje de τ, puesto que, de acuerdo con la fórmula para la derivada de una función de función,

$$(\varphi_1'(\tau))^2 + (\psi_1'(\tau))^2 + (\chi_1'(\tau))^2 =$$
$$= [(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2](\lambda'(\tau))^2 > 0. \qquad (3)$$

Sin embargo, cuando se introduce el nuevo parámetro τ, puede alterarse la orientación de Γ. Si $\lambda'(\tau) > 0$ en $[c, d]$, la función $t = \lambda(\tau)$ es estrictamente creciente y $\lambda(c) = a$, $\lambda(d) = b$. En este

caso, al crecer τ, crece también t desde $\lambda(c) = a$ hasta $\lambda(d) = b$, es decir, la orientación de Γ no cambia: las ecuaciones (1) y (1') definen una misma curva suave con la misma orientación, mas con ayuda de los parámetros distintos. En cambio, si $\lambda'(\tau) < 0$ en $[c, d]$, entonces $\lambda(c) = b$ y $\lambda(d) = a$, y, al crecer τ, el parámetro t va decreciendo. En este caso las ecuaciones (1') definen la misma curva Γ que las ecuaciones (1), pero de orientación opuesta.

En las cuestiones, donde se debe tomar en consideración la orientación de la curva, por Γ se entiende no sólo la propia curva (un lugar geométrico de puntos), sino también su orientación. Es

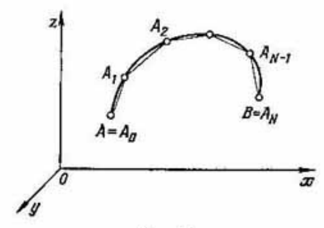


Fig. 84

menester recordar que las ecuaciones (1) definen tanto la propia curva, como la orientación de ella (el movimiento del punto de Γ en el sentido de crecimiento de t). Si el parámetro t se sustituye por otro parámetro τ ($t = \lambda(\tau)$), se obtendrá la misma curva orientada Γ, siempre que $\lambda'(\tau) > 0$. Si, en cambio, $\lambda'(\tau) < 0$, se obtendrá de nuevo la misma curva, pero esta vez orientada en el sentido opuesto y se debe utilizar otro símbolo para designarla ésta última (como una curva orientada), por ejemplo, Γ_-.

Dada una curva orientada Γ mediante las ecuaciones (1), la curva Γ_- puede, por ejemplo, definirse mediante las ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(-\tau), \\ y &= \psi(-\tau), \\ z &= \chi(-\tau). \end{aligned}\right\} -b \leqslant \tau \leqslant -a.$$

Introduzcamos el concepto de longitud del arco de una curva continua Γ. Sea dada mediante las ecuaciones (1) una curva continua Γ. Partiremos el segmento $[a, b]$ por los valores $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = b$. A cada t_k le corresponde un punto $A_k \in \Gamma$ ($A_0 = A$, $A_N = B$). Unamos los puntos A_k sucesivamente por medio de los segmentos A_kA_{k+1} (fig. 84). De resultas obtendremos una quebrada $\Gamma_N = A_0A_1 \ldots A_N$ inscrita en Γ. La longitud

de Γ_N es igual a la suma de longitudes de $|A_kA_{k+1}|$:

$$|\Gamma_N| = \sum_{k=0}^{N-1} |A_kA_{k+1}|. \tag{4}$$

Se llama longitud del arco Γ el límite de la longitud de Γ_N, cuando el máximo de $t_{j+1} - t_j$ tiende a cero

$$\text{máx} \lim_{(t_{j+1}-t_j)\to 0} |\Gamma_N| = |\Gamma|, \tag{5}$$

siempre que dicho límite existe (es un número finito). Lo hemos designado con $|\Gamma|$.

Se puede demostrar que para cualquier curva continua (1) existe el límite (5), finito o infinito $(+\infty)$. En el caso si el límite citado es finito, la curva se denomina *rectificable*.

TEOREMA 1. *Una curva suave Γ, definida por las igualdades* (1), *es rectificable. La longitud de su arco es igual a*

$$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2}\, dt. \tag{6}$$

En esta enunciación es importante que las ecuaciones de Γ vienen dadas en el segmento $[a, b]$. Si fueran prefijadas en el intervalo (a, b), donde φ, ψ, χ son continuamente diferenciables en (a, b) y sus derivadas no son nulas simultáneamente, también diríamos que las ecuaciones (1) determinan una curva suave, pero ésta podría ser no rectificable. No obstante, cualquier su trozo, correspondiente a cierto segmento $[c, d] \subset (a, b)$, es rectificable.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 1. Al aplicar el teorema de Lagrange a las funciones φ, ψ, χ, tendremos ($\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$, $\lambda_k = \max\limits_k \Delta t_k$)

$$\Delta\varphi = \varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k) = \varphi'(t_k')\,\Delta t_k,$$
$$\Delta\psi = \psi(t_{k+1}) - \psi(t_k) = \psi'(t_k'')\,\Delta t_k,$$
$$\Delta\chi = \chi(t_{k+1}) - \chi(t_k) = \chi'(t_k''')\,\Delta t_k,$$

y, por consiguiente (las explicaciones vienen más abajo):

$$|\Gamma_N| = \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{(\Delta\varphi)^2 + (\Delta\psi)^2 + (\Delta\chi)^2} =$$
$$= \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{[\varphi'(t_k')]^2 + [\psi'(t_k'')]^2 + [\chi'(t_k''')]^2}\,\Delta t_k =$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{[\varphi'(t_k')]^2+[\psi'(t_k')]^2+[\chi'(t_k')]^2}\,\Delta t_k+$$

$$+r_N \xrightarrow[\lambda_h \to 0]{} \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2}\,dt \qquad (7)$$

(aquí t_k', t_k'', $t_k''' \in (t_k, t_{k+1})$ son, en general, unos puntos distintos), es decir, es válida la fórmula (6).

En efecto, por ser continua en (6) la función subintegral,

$$\lim_{\lambda_h \to 0} \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{\varphi'(t_k')]^2+[\psi'(t_k')]^2+[\chi'(t_k')]^2}\,\Delta t_k =$$

$$= \int_a^b \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2}\,dt.$$

Además, observemos que se satisface la desigualdad

$$\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}-\sqrt{\eta_1^2+\eta_2^2+\eta_3^2}| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+(\xi_2-\eta_2)^2+(\xi_3-\eta_3)^2},$$

la cual dice que la diferencia entre las longitudes de dos lados de un triángulo no es superior a la longitud del tercer lado. Luego, por cuanto las funciones ψ' y χ' son continuas en $[a, b]$, ellas serán también uniformemente continuas en $[a, b]$. Por lo tanto, si $\lambda_h < \delta$, entonces

$$|\psi'(t_k'')-\psi'(t_k')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

$$|\chi'(t_k'')-\chi'(t_k')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

y, por consiguiente

$$|r_N| = \Big| \sum_{k=0}^{N-1} [\sqrt{[\varphi'(t_k')]^2+[\psi'(t_k'')]^2+[\chi'(t_k'')]^2}-$$

$$-\sqrt{[\varphi'(t_k')]^2+[\psi'(t_k')]^2+[\chi'(t_k')]^2}]\,\Delta t_k \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \sqrt{[\psi'(t_k'')-\psi'(t_k')]^2+[\chi'(t_k'')-\chi'(t_k')]^2}\,\Delta t_k \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{2(b-a)} \sum_{k=0}^{N-1} \Delta t_k < \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Esto es indicio de que r_N tiende a cero cuando $\lambda_h \to 0$.

Apliquemos la fórmula (6) para calcular la longitud del arco de Γ, cuando ésta última viene prefijada por las ecuaciones (1') mediante el parámetro τ. Tenemos (véase (6))

$$|\Gamma_1| = \int_c^d \sqrt{(\varphi_1'(\tau))^2 + (\psi_1'(\tau))^2 + (\chi_1'(\tau))^2}\,d\tau =$$

$$= \int_c^d \sqrt{(\varphi'(\lambda(\tau)))^2 + (\psi'(\lambda(\tau)))^2 + (\chi'(\lambda(\tau)))^2}\,\lambda'(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2}\,dt, \quad (\lambda'(\tau) > 0).$$

En la última igualdad de esta cadena hemos realizado el cambio de variable $t = \lambda(\tau)$ en la integral.

Por consiguiente, $|\Gamma_1| = |\Gamma|$.

Vemos, pues, que la fórmula (6) para la longitud de un arco se expresa del modo invariante a través del parámetro del arco.

Introduzcamos una función

$$s = \mu(t) = \int_a^t \sqrt{(\varphi'(u))^2 + (\psi'(u))^2 + (\chi'(u))^2}\,du$$

$$(a \leqslant t \leqslant b) \tag{8}$$

del límite superior de la integral. Ésta expresa la longitud del arco $\breve{AC}$, donde C es un punto variable del arco $\breve{AB} = \Gamma$ correspondiente al valor del parámetro t. Bajo el signo de integral en (8) figura una función continua de u, por lo cual la derivada de la longitud del arco s respecto de t vale

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2}\,. \tag{9}$$

Puesto que $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$ son continuas, la derivada ds/dt es, a su vez, una función continua de t, y, además, positiva (véase el § 7.3, (2)). Pero, en este caso, $s = \mu(t)$ es estrictamente creciente en $[a, b]$ y tiene su función inversa continuamente diferenciable

$$t = \mu^{-1}(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant |\Gamma|, \tag{10}$$

que posee la propiedad

$$\frac{dt}{ds} = [(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2]^{-1/2} > 0.$$

Pero, en este caso, la variable s puede servir de parámetro de nuestra curva suave Γ, y, por ende, las ecuaciones de Γ pueden ser escritas

en la forma

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi\,[\mu^{-1}(s)] = \varphi_*(s), \\ y &= \psi\,[\mu^{-1}(s)] = \psi_*(s), \\ z &= \chi\,[\mu^{-1}(s)] = \chi_*(s), \end{aligned}\right\} 0 \leqslant s \leqslant |\Gamma|,$$

donde las funciones φ_*, ψ_*, χ_* son continuamente diferenciables en $[0, |\Gamma|]$.

Con el fin de obtener los resultados correspondientes para una curva plana $\Gamma = \overset{\frown}{AB}$, se debe poner en los razonamientos antecedentes $z = \chi(t) \equiv 0$. Entonces, la curva plana suave Γ se definirá por dos ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned}\right\} a \leqslant t \leqslant b,$$

donde φ y ψ son las funciones continuamente diferenciables que obedecen la condición

$$(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 > 0, \quad t \in [a, b].$$

La longitud de Γ es

$$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt. \tag{6'}$$

La longitud del arco $\overset{\frown}{AC} \subset \Gamma$, donde C es un punto de Γ, correspondiente al valor del parámetro $t \in [a, b]$

$$s = \int_a^t \sqrt{(\varphi'(u))^2 + (\psi'(u))^2}\, du, \tag{8'}$$

y la diferencial del arco vale

$$ds = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt. \tag{9'}$$

Si Γ está definida con ayuda de una función continuamente diferenciable

$$y = f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

podemos considerar que Γ se define por el parámetro x:

$$\left.\begin{aligned} x &= x, \\ y &= f(x), \end{aligned}\right\} a \leqslant x \leqslant b.$$

Entonces, en virtud de (6′)

$$|\Gamma| = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

En cuanto la diferencial del arco de Γ se expresa mediante la fórmula

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

EJEMPLO 1. Hállese la longitud del arco de la curva Γ: $y = \operatorname{ch} x$, $0 \leqslant x \leqslant 2$.

Tenemos

$$|\Gamma| = \int_0^2 \sqrt{1 + (\operatorname{sh} x)^2}\, dx = \int_0^2 \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x|_0^2 = \operatorname{sh} 2 = \frac{e^2 - e^{-2}}{2}.$$

EJEMPLO 2. Hállese la longitud de una circunferencia Γ de radio R. La circunferencia puede definirse paramétricamente del modo siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} x = R\cos t, \\ y = R\operatorname{sen} t, \end{array}\right\} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Entonces

$$|\Gamma| = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \operatorname{sen}^2 t + R^2 \cos^2 t}\, dt = R\int_0^{2\pi} dt = 2\pi R.$$

EJEMPLO 3. Hállese la longitud del arco de la curva Γ: $y = \int_0^x \sqrt{2t + t^2}\, dt$, cuando x varía dentro de los límites de 0 a 2.

Demos a conocer que la dependencia explícita de y en función de x se puede encontrar, si calculamos la integral con ayuda de la sustitución de Euler o considerando la integral dada como una irracionalidad lineal fraccional. Mas, en el caso dado no nos hace falta la dependencia explícita. Tenemos $y' = \sqrt{2x + x^2}$. Por eso

$$|\Gamma| = \int_0^2 \sqrt{1 + 2x + x^2}\, dx = \int_0^2 (x+1)\, dx = \frac{(x+1)^2}{2}\Big|_0^2 = 4.$$

§ 7.4. Curvatura y radio de curvatura de una curva. Evoluta y evolvente

Se llama *curvatura de una circunferencia* de radio R un número $1/R$. Este número puede obtenerse también como razón del ángulo formado por las tangentes en los extremos de un arco de la circunferencia a la longitud de dicho arco. El ángulo formado por las tangentes a una circunferencia en los puntos A y B es igual al ángulo central α entre los radios OA y OB. La longitud $|\overset{\frown}{AB}|$ del arco

$\breve{AB}$ es igual a $R\alpha$. Por eso (véase la fig. 85)

$$\frac{\alpha}{|\breve{AB}|}=\frac{\alpha}{R\alpha}=\frac{1}{R}.$$

La última definición de curvatura de una circunferencia ofrece la idea de cómo se puede definir la curvatura de una curva suave arbitraria Γ.

Examinemos una curva suave arbitraria Γ. De acuerdo con lo demostrado en el § 7.3, esta curva es rectificable y hay sentido de

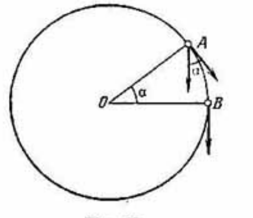


Fig. 85

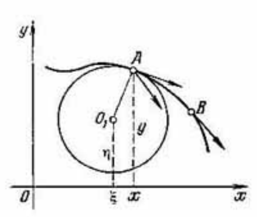


Fig. 86

hablar sobre la longitud de cualquier su arco $\breve{AB}$. El ángulo α ($0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$), formado por las tangentes a Γ en los puntos A y B, se denomina *ángulo de contingencia del arco* $\breve{AB}$. La razón del ángulo de contingencia del arco $\breve{AB}$, y su longitud lleva el nombre de *curvatura media del arco* $\breve{AB}$ (fig. 86). Por fin, se llama *curvatura de la curva* Γ en su punto A un límite (finito o infinito) de la razón entre el ángulo de contingencia α del arco $\breve{AB}$ de la curva y su longitud $|\breve{AB}| = |\Delta s|$, cuando la última tiende a cero:

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\alpha}{|\Delta s|} \tag{1}$$

De este modo, $0 \leqslant K \leqslant \infty$. Por definición, la magnitud $R = 1/K$ (donde se considera que $0 = 1/\infty$, $\infty = 1/0$) se denomina *radio de curvatura* de Γ en el punto A.

El punto O_1, dispuesto en la normal a Γ en el punto A y alejado de dicho punto a la distancia $R = 1/K$ en la dirección de concavidad de Γ, se denomina *centro de curvatura* de Γ en el punto A (figs. 87 y 88). Es evidente que el centro de una circunferencia coincide con el centro de su curvatura.

Una curva γ que representa el lugar geométrico de los centros O_1 de curvatura de la curva plana Γ, se denomina *evoluta* de Γ. La propia curva Γ lleva el nombre de *evolvente* de γ.

Supongamos que una curva Γ viene dada mediante la función $y = f(x)$ $(c \leqslant x \leqslant d)$, que tiene la segunda derivada continua. Hallemos su curvatura en el punto $A = (x, f(x))$. Sean φ_1 y φ_2

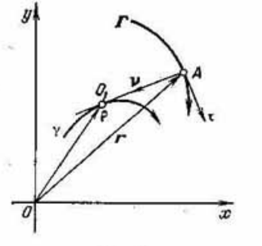


Fig. 87

Fig. 88

los ángulos que las tangentes a Γ en los puntos A y $B = (x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ forman con la dirección positiva del eje x (véase la fig. 86).

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = f'(x), \quad \operatorname{tg}\varphi_2 = f'(x + \Delta x),$$

$$\alpha = |\operatorname{arctg} f'(x) - \operatorname{arctg} f'(x + \Delta x)|. \tag{2}$$

Luego,

$$\Delta s = |AB| = \int_x^{x+\Delta a} \sqrt{1 + (f'(u))^2}\, du. \tag{3}$$

Por tanto, de (1) obtenemos (aplicando la regla de L'Hospital (respecto de Δx)):

$$K = \lim_{\Delta x \to 0} \left| \frac{\operatorname{arctg} f'(x) - \operatorname{artg} f'(x + \Delta x)}{\int_x^{x+\Delta x} \sqrt{1 + (f'(u))^2}\, du} \right| =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left| \frac{\dfrac{f''(x + \Delta x)}{1 + (f'(x + \Delta x))^2}}{\sqrt{1 + (f'(x + \Delta x))^2}} \right| = \frac{|f''(x)|}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}}.$$

Hemos obtenido la fórmula la curvatura

$$K = \left| \frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}} \right|. \tag{4}$$

Si la curva suave Γ está prefijada en la forma paramétrica:

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{array}\right\} \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

donde φ y ψ son las funciones dos veces continuamente diferenciables, entonces, haciendo uso de la regla para diferenciar las funciones definidas paramétricamente, obtendremos (véase el § 4.11)

$$f'(x)=\frac{y'_t}{x'_t}, \quad f''(x)=\frac{x'_t y''_t - y'_t x''_t}{(x'_t)^3},$$

$$R=\left|\frac{(x_t'^2+y_t'^2)^{3/2}}{y'_t x''_t - x'_t y''_t}\right|, \qquad K=\frac{1}{R}. \tag{5}$$

Hallemos la ecuación paramétrica de la evoluta γ y de la curva Γ, definida por la ecuación (figs. 87, 88) $y = f(x)$. Tenemos (véase (4))

$$\frac{1}{R}=\frac{|f''(x)|}{(1+(f'(x))^2)^{3/2}}=\frac{f''(x)\operatorname{sign} f''(x)}{(1+(f'(x))^2)^{3/2}}. \tag{6}$$

Supongamos que el centro de curvatura O_1 de la curva Γ en su punto $A = (x, f(x))$ tiene las coordenadas (ξ, η). Se determina por un vector

$$\rho = \boldsymbol{r} + R\boldsymbol{\nu}, \tag{7}$$

donde $\boldsymbol{r}$ es el radio vector del punto $A \in \Gamma$, y $\boldsymbol{\nu}$ es el vector unidad de la normal orientado hacia el lado de concavidad de Γ. La curva Γ se expresa por una ecuación vectorial

$$\boldsymbol{r} = (x, y).$$

De aquí

$$\dot{\boldsymbol{r}}_x = (1, y'_x), \quad \ddot{\boldsymbol{r}}_x = (0, y''_x).$$

Luego (véase el § 4.23, (3′)),

$$\boldsymbol{\nu}=\pm\left(\frac{-y'_x}{\sqrt{1+y_x'^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+y_x'^2}}\right).$$

El signo debe elegirse de una manera tal que el vector $\boldsymbol{\nu}$ sea orientado hacia el lado de concavidad de Γ, es decir, que el producto escalar $(\boldsymbol{\nu}, \ddot{\boldsymbol{r}}_x)$ tenga el signo positivo:

$$(\boldsymbol{\nu}, \ddot{\boldsymbol{r}}_x)=\pm\frac{y''_x}{\sqrt{1+y_x'^2}}=y''_x(\operatorname{sign} y''_x)(1+y_x'^2)^{-1/2}.$$

Así pues,

$$\boldsymbol{\nu}=\operatorname{sign} y''_x\cdot\left(\frac{-y'_x}{\sqrt{1+y_x'^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+y_x'^2}}\right). \tag{8}$$

Al pasar en la igualdad (7) a las proyecciones, teniendo presentes (6) y (8), obtendremos

$$\xi = x + \frac{(1+y_x'^2)^{3/2}}{y_x'' \operatorname{sign} y_x''} \cdot \frac{-y_x' \operatorname{sign} y_x''}{(1+y_x'^2)^{1/2}} = x - \frac{y_x'(1+y_x'^2)}{y_x''},$$

$$\eta = y + \frac{(1+y_x'^2)^{3/2}}{y_x'' \operatorname{sign} y_x''} \cdot \frac{\operatorname{sign} y_x''}{(1+y_x'^2)^{1/2}} = y + \frac{1+y_x'^2}{y_x''}. \qquad (9)$$

Demostremos que una *normal a la curva (a la evolvente) en el punto* $A = (x, f(x))$ *es tangente a la evoluta* γ en el punto $O_1 = (\xi, \eta)$. Para esto será suficiente demostrar que las tangentes a la curva Γ y a la evoluta γ en los puntos correspondientes son ortogonales (perpendiculares entre sí):

$$x_x'\xi_x' + y_x'\eta_x' = 1 \cdot \left[1 - y_x'' \frac{1+y_x'^2}{y_x''} - y_x'\left(\frac{1+y_x'^2}{y_x''}\right)'\right] + y_x'\left[y_x' + \left(\frac{1+y_x'^2}{y_x''}\right)'\right] = 0.$$

La otra propiedad importante de la evoluta consiste en lo siguiente. *El incremento del radio de curvatura de una evolvente es igual,*

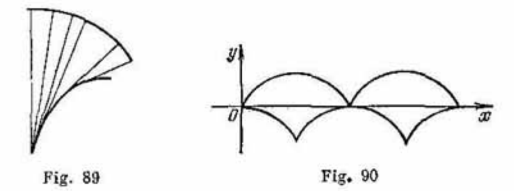


Fig. 89 Fig. 90

salvo el signo, al incremento de la longitud del arco correspondiente de la evoluta:

$$R_2 - R_1 = \pm \mid \sigma_2 - \sigma_1 \mid.$$

Aquí se omite la demostración de esta propiedad.

Imaginémonos un hilo enrollado en la evoluta. Supongamos que el hilo se desenrolla de la última quedando siempre denso. Despegándose de la evoluta, el hilo, evidentemente, siempre será tangente a la evoluta. Entre tanto, el extremo libre de la evoluta describirá la evolvente (fig. 89). Como la longitud del hilo puede ser arbitraria, la evoluta engendra una infinidad de evolventes. Una longitud a la que el hilo se desenrolla de la evoluta es igual, obviamente, al incremento del radio de curvatura de la evolvente. Si la curva Γ viene dada paramétricamente: $x = x(t)$, $y = y(t)$, entonces la

evoluta se definirá mediante las ecuaciones

$$\xi = x - y'_t \frac{x_t'^2 + y_t'^2}{x'_t y''_t - y'_t x''_t}, \quad \eta = y + x'_t \frac{x_t'^2 + y_t'^2}{x'_t y''_t - y'_t x''_t} \tag{10}$$

(véase el § 4.11).

EJEMPLO 1. La evoluta de la cicloide $x = t - \operatorname{sen} t$, $y = t - \cos t$ es la curva $\xi = t + \operatorname{sen} t$, $\eta = -1 + \cos t$. Suponiendo

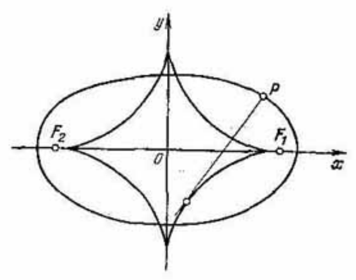


Fig. 91

$t = \tau + \pi$, obtendremos las ecuaciones

$$\xi - \pi = \tau - \operatorname{sen} \tau, \quad \eta + 2 = 1 - \cos \tau,$$

que determinan la curva de partida, pero algo desplazada (la evoluta de una cicloide es también una cicloide congruente de la de partida, la fig. 90).

EJEMPLO 2. La evoluta de la elipse $x = a \cos t$, $y = b \operatorname{sen} t$ $(a \geqslant b > 0)$ es una astroide (fig. 91)

$$\xi = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t, \quad \eta = -\frac{a^2 - b^2}{b} \operatorname{sen}^3 t.$$

§ 7.5. Area de una superficie de revolución

Sea Γ una curva que se describe en el sistema rectangular de coordenadas x, y por la función positiva $y = f(x)$, $(a \leqslant x \leqslant b)$, que tiene en $[a, b]$ una derivada continua. Calculemos el área S de la superficie de revolución de Γ alrededor del eje x. Con este fin realicemos una partición $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, inscribamos en la curva Γ una quebrada Γ_n con vértices $(x_k, f(x_k))$ y calculemos el área de la superficie de revolución de la quebrada alrededor

del eje x (suma de las áreas de las superficies laterales de los conos truncados):

$$S_n = \pi \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_k) + f(x_{k+1})] \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2},$$
$$\Delta y_k = f(x_{k+1}) - f(x_k).$$

Aplicando el teorema de Lagrange a la diferencia Δy_k, obtendremos

$$S_n = \pi \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_k) + f(x_{k+1})] \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2}\, \Delta x_k =$$
$$= 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \sqrt{1 + (f'x_k))^2} \Delta x_k + R_n \to$$
$$\to 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

para $\lambda_k = \max\limits_k \Delta x_k \to 0$; de acuerdo con el teorema de Lagrange, el punto $\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$). En efecto, por cuanto f y f' son continuas en $[a, b]$, entonces la función $f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}$ es integrable, por lo cual

$$\lim_{\lambda_k \to 0} 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \sqrt{1 + (f'(x_k))^2}\, \Delta x_k = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Luego,

$$|R_n| = \Big| \pi \sum_{k=0}^{n-1} \{ [f(x_k) + f(x_{k+1})] \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} -$$
$$- 2f(x_k) \sqrt{1 + (f'(x_k))^2} \} \Delta x_k \Big| =$$
$$= \Big| \pi \sum_{k=0}^{n-1} \{ (f(x_k) + f(x_{k+1})) \left(\sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} - \sqrt{1 + (f'(x_k))^2} \right) +$$
$$+ (f(x_{k+1}) - f(x_k)) \sqrt{1 + (f'(x_k))^2} \} \Delta x_k \Big| \leqslant$$
$$\leqslant \pi \sum_{k=0}^{n-1} \{ (|f(x_k)| + |f(x_{k+1})|)\, |f'(\xi_k) - f'(x_k)| +$$
$$+ \sqrt{1 + (f'(x_k))^2}\, |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \} \Delta x_k.$$

Puesto que f y f' son continuas en $[a, b]$, están acotadas y son uniformemente continuas en $[a, b]$. Por eso, $|f| \leqslant M$, $\sqrt{1 + (f'(x))^2} \leqslant$

$\leqslant M$, y $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$|f(x_{k+1}) - f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{3\pi M (b-a)},$$

$$|f'(x_k) - f'(\xi_k)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3\pi M (b-a)}$$

para $\lambda_k < \delta$. De aquí

$$|R_n| \leqslant \pi \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ 2M \frac{\varepsilon}{3\pi M (b-a)} + M \frac{\varepsilon}{3\pi M (b-a)} \right\} \Delta x_k =$$

$$= \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon,$$

es decir, $R_n \to 0$, cuando $\lambda_k \to 0$. De este modo, el área de la superficie de un cuerpo de revolución es igual a

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx. \tag{1}$$

EJEMPLO. Hállese el área S de la superficie de revolución de una elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b)$$

alrededor del eje x (área de la superficie de un elipsoide de revolución).

Resolución. La ecuación de la mitad superior de la elipse

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,(|x| \leqslant a), \quad y' = -\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$S = 2\pi \int_{-a}^{a} \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{x^2}{a^2 - x^2}}\, dx =$$

$$= \frac{4\pi b}{a^2} \int_0^a \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)\, x^2}\, dx = \left(u = x\sqrt{a^2 - b^2}\right) =$$

$$= \frac{4\pi b}{a^2 \sqrt{a^2 - b^2}} \int_0^{a\sqrt{a^2 - b^2}} \sqrt{a^4 - u^2}\, du =$$

$$= \frac{4\pi b}{a^2 \sqrt{a^2 - b^2}} \left\{ \frac{u}{2}\sqrt{a^4 - u^2} + \frac{a^4}{2} \arcsen \frac{u}{a^2} \right\}_0^{a\sqrt{a^2 - b^2}} =$$

$$= 2\pi b^2 + \frac{2\pi b a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsen \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Cuando $b \to a$, en el límite obtendremos $S = 4\pi a^2$ que es el área de la superficie de una esfera de radio a.

§ 7.6. Fórmula de interpolación de Lagrange

Planteemos el problema siguiente. Se pide hallar un polinomio algebraico $L_n(x)$ de grado no superior a n, el cual coincidiría con la función $f(x)$ en los puntos prefijados $x_0, x_1, \ldots, x_n$. De este modo, deben satisfacerse las condiciones

$$f(x_k) = L_n(x_k) \quad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

El polinomio $L_n(x)$ es único. Si suponemos que existe, además, el otro polinomio $\overline{L}_n(x)$ que posea las mismas propiedades, entonces la diferencia $L_n(x) - \overline{L}_n(x)$ se anulará en $n+1$ punto de $x_0, \ldots, x_n$ y será un polinomio algebraico de grado n, quiere decir, la diferencia es idénticamente igual a cero y $L_n(x) \equiv \overline{L}_n(x)$.

De la unicidad se deduce que si la función de partida $f(x)$ es de por sí un polinomio algebraico de grado n, coincide con $L_n(x)$ para todos los x ($f(x) \equiv L_n(x)$).

Hallemos al principio un polinomio algebraico de grado n $Q_{n,k}(x)$, el cual es igual a cero en los puntos $x_i \neq x_k$, y es igual a uno en el punto x_k. Es evidente que

$$Q_{n,k}(x) = A(x - x_0) \ldots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \ldots (x - x_n),$$

donde la constante A se halla de la condición

$$1 = Q_{n,k}(x_k) = A \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (x_k - x_i), \text{ es decir,}$$

$$A = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (x_k - x_i)^{-1}.$$

De este modo, el polinomio que se busca tiene por expresión

$$Q_{n,k}(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}.$$

Si introducimos en los razonamientos el símbolo de Kronecker

$$\delta_{ki} = \begin{cases} 0, & k \neq i, \\ 1, & k = i, \end{cases}$$

tendremos

$$Q_{n,k}(x_i) = \delta_{ki}.$$

El problema planteado lo resuelve el polinomio

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} Q_{n,k}(x) f(x_k), \tag{1}$$

pues

$$L_n(x_i)=\sum_{k=0}^{n} Q_{n,k}(x_i)\, f(x_k)=\sum_{k=0}^{n} \delta_{ki} f(x_k)=f(x_i) \quad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ n).$$

El polinomio (1) se llama *polinomio de interpolación de Lagrange.*

Igual que al obtener la fórmula para el término residual en la fórmula de Taylor, podemos probar que si $f(x)$ tiene una derivada de $(n+1)$-ésimo orden, entonces

$$f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega_{n+1}(x), \tag{2}$$

donde

$$\omega_{n+1}(x)=\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

y ξ es un punto perteneciente al segmento mínimo en el que se contienen los puntos $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ x$. En efecto, pongamos

$$f(x)-L_n(x)=K\omega_{n+1}(x), \tag{3}$$

donde K es una magnitud dependiente de x. Denotemos

$$\varphi(z)=f(z)-L_n(z)-K\omega_{n+1}(z),$$

donde K es del mismo valor que en (3); es una magnitud independiente de z. Está claro que $\varphi(x)=0$, $\varphi(x_i)=0$ $(i=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$. Sea, por ejemplo, $x_0<x<x_1<\ldots<x_n$, entonces, al aplicar el teorema de Rolle a la función φ en los segmentos $[x_0,\ x]$, $[x,\ x_1]$, ..., $[x_{n-1},\ x_n]$, llegamos a que la derivada $\varphi'(x)$ se anula en el interior de cada uno de ellos. A continuación, al aplicar el teorema de Rolle sucesivamente a las funciones $\varphi',\ \ldots,\ \varphi^{(n)}$, obtenemos que existe un punto ξ, perteneciente al segmento mínimo que contiene en sí los puntos $x,\ x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$, y en este punto $\varphi^{(n+1)}(\xi)=0$, pero

$$\varphi^{(n+1)}(z)=f^{(n+1)}(z)-K(n+1)!$$

Suponiendo $z=\xi$, obtenemos $K=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$. Por esto

$$f(x)-L_n(x)==\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega_{n+1}(x),$$

y la igualdad (2) queda demostrada.

El polinomio de interpolación de Lagrange se emplea para el cálculo aproximado de las derivadas de la función $f(x)$, cuando los valores de ésta se conocen sólo en los puntos $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$. A saber, se supone

$$f^{(k)}(x)\approx L_n^{(k)}(x).$$

Por ejemplo, si $f(x)$ se conoce en los puntos x_0, x_1, entonces, al construir según los puntos citados el polinomio de Lagrange $L_1(x)$, encontramos que

$$f'(x) \approx \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}.$$

En los párrafos que siguen más abajo señalaremos la aplicación del polinomio de Lagrange para el cálculo aproximado de la integral definida.

§ 7.7. Fórmulas de integración numérica de los rectángulos y de los trapecios

Supongamos que se necesita calcular la integral definida de una función f continua en el segmento $[a, b]$. Si se conoce su primitiva, será natural con este fin emplear la fórmula de Newton—Leibniz.

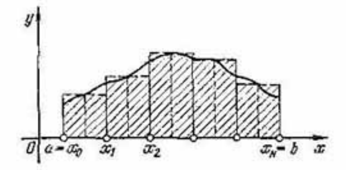


Fig. 92

No obstante, la primitiva no es siempre conocida y surge un problema referente al cálculo aproximado de la integral.

Un método más simple de cálculo aproximado de la integral definida se desprende de la propia definición de ésta. Dividimos el segmento $[a, b]$ en partes iguales mediante los puntos

$$x_k = a + k\frac{b-a}{N} \quad (k = 0, 1, \ldots, N) \tag{1}$$

y suponemos

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right), \tag{2}$$

donde el signo $\approx$ expresa una igualdad aproximada

La expresión (2) lleva el nombre de *fórmula de integración numérica (fórmula de cuadratura) de los rectángulos.* En el caso expuesto en la fig. 92 el área buscada de una figura, limitada por la curva $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$, $x = b$, es aproximadamente igual a la suma de las áreas de los rectángulos expuestos.

Sabemos que para una función continua en $[a, b]$ el límite del segundo miembro de la igualdad aproximada (2), cuando $N \to \infty$, es exactamente igual al miembro primero, lo que nos autoriza considerar que, siendo N grande, el error de la fórmula (2), o sea, el valor absoluto de la diferencia entre los miembros primero y segundo de (2), es pequeño. Sin embargo, surge una cuestión referente a la estimación del error. Más abajo nos enteraremos de cómo se obtiene la estimación citada al exigir que la función f satisfaga, salvo la continuidad, ciertas condiciones de suavidad (es decir, tenga cierto número de derivadas).

Cabe notar que *si la función $f(x) = Ax + B$ es lineal, para ella la fórmula* (2) *es exacta*: el segundo miembro de (2) es exactamente

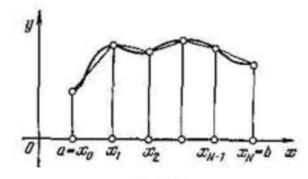


Fig. 93

igual al primero. Por cuanto una función lineal es un polinomio de primer grado, podemos decir que *la fórmula de integración numérica de los rectángulos es exacta para todos los polinomios de grado no superior a uno.*

Demos a conocer también un otro método bien natural para el cálculo aproximado de la integral definida que nos lleva a *la fórmula de integración numérica de los trapecios.* Este consiste en que un segmento $[a, b]$ se divide en partes iguales mediante los puntos del sistema (1) y se supone aproximadamente que

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{N}\left(\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}+\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{f(x_{N-1})+f(x_N)}{2}\right)=$$

$$=\frac{b-a}{2N}\,[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\ldots+2f(x_{N-1})+f(x_N)]. \quad (3)$$

En la fórmula de los trapecios el área de la figura curvilínea examinada más arriba se agota aproximadamente por las áreas de los trapecios (fig. 93). Es importante tener en cuenta que *la fórmula*

de los trapecios es exacta para las funciones lineales $Ax + B$ (A y B son unos números constantes), es decir, para los polinomios de grado no superior al primero; si tal función se sustituye en (3) en lugar de $f(x)$, se obtendrá una igualdad exacta. En este sentido la fórmula de los trapecios no tiene ventaja alguna sobre la de los rectángulos: ambas son exactas para las funciones lineales.

Designemos con $R_N(f)$ la diferencia entre los miembros primero y segundo de la fórmula de integración numérica y llamemos $R_N(f)$ ***término residual de la fórmula de integración numérica.***

Si una función f tiene derivada continua a trozos f' que satisface la desigualdad $|f'(x)| \leqslant M_1$, entonces el término residual de la fórmula de los rectángulos (2) obedece a la desigualdad

$$|R_N(f)| \leqslant \frac{M_1(b-a)^2}{4N}, \tag{2'}$$

y el término residual de la fórmula de los trapecios (3) obedece a la desigualdad

$$|R_N(f)| \leqslant \frac{M_1(b-a)^2}{4N}. \tag{3'}$$

Ha de ser notado que las constantes aquí están calculadas exactamente y no pueden ser reducidas. La deducción de la estimación (2′) viene abajo. Las demás estimaciones se dan sin demostración.

Vemos, pues, que en ambos casos para la clase de funciones que tienen una derivada acotada $|f'(x)| \leqslant M_1$, los términos residuales tienen el orden $O(N^{-1})$ (véase el § 3.10, (14)).

En cambio, para la clase de funciones que poseen en $[a, b]$ la segunda derivada acotada $|f''(x)| \leqslant M_2$ tiene lugar la estimación

$$|R_N(f)| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{12N^2},$$

que es cierta para las fórmulas de los rectángulos y de los trapecios. Ahora, el orden de aproximación por medio de las fórmulas de los rectángulos y de los trapecios, que se consideran, ya es $O(N^{-2})$.

Resulta que para la clase de funciones poseedoras de derivada acotada de orden $l > 2$ el orden de aproximación por medio de las fórmulas de los rectángulos y de los trapecios no se mejora: el orden queda igual a $O(N^{-2})$.

La explicación de este fenómeno está estrechamente vinculada con el hecho de que ambas fórmulas de integración numérica (de los rectángulos y de los trapecios) son exactas para los polinomios de primer grado y no son exactas para los polinomios de grado superior a uno.

Si la función f cuenta con la tercera derivada acotada, se puede imaginar una fórmula de integración numérica que dará el error de aproximación de orden $O(N^{-3})$. Tal fórmula debe ser exacta para los polinomios de segundo grado. Mas, si no es exacta para los polinomios de tercer grado, entonces para las funciones que cuentan con una derivada acotada de cuarto grado el error de aproximación queda el mismo, es decir, tiene el orden $O(N^{-3})$.

El fenómeno de que se trata aquí se ilustrará en el § 7.8 con un ejemplo de la fórmula de integración numérica de Simpson[1]).

---

[1]) Simpson T. (1710—1761), un matemático inglés.

He aquí la demostración de la estimación (2'). Introduzcamos las designaciones: $h=\frac{b-a}{N}$, $\xi_k=\frac{x_k+x_{k+1}}{2}$, x_k son los puntos del sistema (1).

$$|R_N(f)|=\left|\int_a^b f(x)\,dx-h\sum_0^{N-1} f(\xi_k)\right|=$$

$$=\left|\sum_0^{N-1}\int_{\xi_k-\frac{h}{2}}^{\xi_k+\frac{h}{2}} f(x)\,dx-h\sum_0^{N-1} f(\xi_k)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_0^{N-1}\left|\int_{\xi_k-\frac{h}{2}}^{\xi_k+\frac{h}{2}} f(x)\,dx-hf(\xi_k)\right|=\sum_0^{N-1}\left|\int_{\xi_k-\frac{h}{2}}^{\xi_k+\frac{h}{2}}[f(x)-f(\xi_k)]\,dx\right|,$$

puesto que

$$\int_{\xi_k-\frac{h}{2}}^{\xi_k+\frac{h}{2}} f(\xi_k)\,dx=hf(\xi_k).$$

Aplicando el teorema de Lagrange bajo el signo de integral y teniendo presente que $|f'(x)|\leqslant M_1$, obtenemos

$$|R_N(f)|\leqslant\sum_0^{N-1}\left|\int_{\xi_k-\frac{h}{2}}^{\xi_k+\frac{h}{2}} f'(\theta_k)(x-\xi_k)\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_0^{N-1}\int_{\xi_k-\frac{h}{2}}^{\xi_k+\frac{h}{2}}|f'(\theta_k)|\,|x-\xi_k|\,dx\leqslant M_1\sum_0^{N-1}\int_{\xi_k-\frac{h}{2}}^{\xi_k+\frac{h}{2}}|x-\xi_k|\,dx,$$

donde θ_k es un punto dispuesto entre x y ξ_k. Realizando el cambio de la variable $x-\xi_k=t$, obtenemos

$$|R_N(f)|\leqslant M_1\sum_0^{N-1}\int_{-h/2}^{h/2}|t|\,dt=2M_1\cdot N\int_0^{h/2} t\,dt=2M_1N\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^{h/2}=$$

$$=\frac{M_1Nh^2}{4}=\frac{M_1(b-a)^2}{4N}.$$

§ 7.8. Fórmula de Simpson

Supongamos que se requiere calcular aproximadamente la integral de una función continua $f(x)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Buscaremos el valor aproximado de la integral en forma de la suma

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n} p_k f(x_k), \qquad (2)$$

donde $p_0, p_1, \ldots, p_n$ y $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ son unos números prefijados.

La fórmula (2) se denomina *fórmula de integración numérica con nudos* x_k *y coeficientes ponderales* p_k.

Al construir las fórmulas aproximadas concretas exigimos que la fórmula (2) sea exacta para los polinomios algebraicos de grado n. Esta condición se cumplirá, si a título de valor aproximado de la integral (1) tomamos la integral definida del polinomio de interpolación de Lagrange de n-ésimo grado de la función f:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b L_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{n} Q_{n,k}(x) f(x_k)\,dx = \sum_{k=0}^{n} p_k f(x_k), \qquad (3)$$

$$p_k = \int_a^b Q_{n,k}(x)\,dx \quad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

$$Q_{n,k}(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)},$$

puesto que si $f(x)$ es un polinomio de grado n, entonces $f(x) \equiv L_n(x)$.

Obtendremos la fórmula (3) para el caso de $n=2$ y los nudos $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$. En este caso

$$Q_{2,0}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-b)(2x-a-b)}{(b-a)^2} = \frac{2(x-b)^2}{(b-a)^2} + \frac{x-b}{b-a},$$

$$Q_{2,1}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{-4(x-a)(x-b)}{(b-a)^2} = -4\frac{(x-b)^2}{(b-a)^2} - 4\frac{x-b}{b-a},$$

$$Q_{2,2}(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-a)(2x-a-b)}{(b-a)^2} = \frac{2(x-a)^2}{(b-a)^2} - \frac{x-a}{b-a}.$$

18–01380

Por tanto

$$p_0=\int_a^b Q_{2,0}(x)\,dx=\left[\frac{2(x-b)^3}{3(b-a)^2}+\frac{(x-b)^2}{2(b-a)}\right]_a^b=\frac{b-a}{6}.$$

Razonando análogamente, obtendremos

$$p_1=\int_a^b Q_{2,1}(x)\,dx=\frac{2(b-a)}{3},$$

$$p_2=\int_a^b Q_{2,2}(x)\,dx=\frac{b-a}{6}.$$

Debido a ello, la fórmula (3) para $n=2$ tiene por expresión

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]. \qquad (4)$$

Ésta es la fórmula de Simpson más simple de integración numérica correspondiente al segmento $[a, b]$.

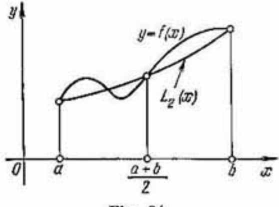


Fig. 94

Desde el punto de vista geométrico, la fórmula (4) significa que el área del trapecio curvilíneo determinada por la función $f(x)$ en $[a, b]$, se ha sustituido por el área que se dispone por debajo de la gráfica de la parábola (fig. 94):

$$y=L_2(x)=f(a)\,Q_{2,0}(x)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)Q_{2,1}(x)+f(b)\,Q_{2,2}(x).$$

Diremos una vez más que, según la construcción, la fórmula (4) es exacta para los polinomios de segundo grado. Resulta, no obstante, que también es exacta para los polinomios de tercer grado. Efectivamente, $\int_a^b x^3\,dx=\frac{b^4-a^4}{4}$, y el segundo miembro de la fórmula (4)

para la función $f(x) = x^3$ es también igual a este número:

$$\frac{b-a}{6}\left[a^3+4\left(\frac{a+b}{2}\right)^3+b^3\right]=$$
$$=\frac{b-a}{6}\left[(a+b)(a^2-ab+b^2)+\frac{(a+b)^3}{2}\right]=$$
$$=\frac{b^2-a^2}{6}\left[\frac{3(a^2+b^2)}{2}\right]=\frac{b^4-a^4}{4}.$$

De este modo, *la fórmula* (4) *es exacta para los polinomios cuyo grado no supera a tres.*

Si dividimos el segmento $[a, b]$ en $2N$ partes iguales mediante los puntos

$$x_k = a + \frac{b-a}{2N}k \quad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ 2N)$$

y aplicamos la fórmula (4) a los segmentos $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, . . ., obtendremos, como resultado, *la fórmula de Simpson (complicada) de integración numérica*

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6N}\{f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+$$
$$+4f(x_3)+\ldots+2f(x_{2N-2})+4f(x_{2N-1})+f(x_{2N})\}. \quad (5)$$

Desde el punto de vista de los cálculos prácticos, la fórmula de Simpson y la de los rectángulos son iguales en lo que se refiere al volumen de trabajo. Pero, si la función f es suficientemente suave, el error de aproximación en los cálculos según la fórmula de Simpson es considerablemente menor (para N grandes) que el error correspondiente del método de rectángulos.

Si la función $f(x)$ cuenta en el segmento $[a, b]$ con una derivada segunda que satisface la desigualdad

$$|f''(x)| \leqslant M_2,$$

y no tiene la tercera, o bien no se puede estimarla por tal o cual razón, entonces para calcular la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ se recomienda que se emplee la fórmula de los trapecios o, lo que es mejor aun, la de Simpson.

Se puede demostrar que el error de aproximación al calcular según la fórmula de los trapecios (§ 7.7, (3)) será:

$$\frac{1}{12}\cdot\frac{(b-a)^3}{N^2}M_2 \quad (6)$$

y según la fórmula de Simpson (5):

$$\frac{1}{81}\cdot\frac{(b-a)^3}{N^2}M_2.$$

Si la función $f(x)$ tiene en $[a, b]$ la cuarta derivada continua que satisface la desigualdad

$$|f^{4}(x)| \leqslant M_4,$$

se recomienda emplear en este caso la fórmula de Simpson. El error de aproximación será:

$$\frac{1}{2880}\,\frac{(b-a)^5}{N^4}\,M_4. \tag{7}$$

Si, en este caso, aplicáramos la fórmula de los trapecios, el error de aproximación tuviera, como antes, el orden N^{-2}, es decir, fuera peor que (7).

EJEMPLO 1. Calcúlese la integral

$$I=\int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx.$$

La integral dada (de una diferencial binomial) no se calcula en funciones elementales.

Calculémosla aproximadamente, dividiendo el segmento [0, 1] en diez partes iguales y haciendo uso de las diferentes fórmulas de integración.

Denotemos los puntos de división de [0, 1] mediante $x_0=0$, $x_1=0,1$, ..., $x_9=0{,}9$, $x_{10}=1$. Calculemos aproximadamente los valores de la función $f(x)=\sqrt{1+x^4}$ en dichos puntos:

$$\begin{aligned}
&f(0)=1, && f(x_1)=1{,}00005, && f(x_2)=1{,}00080,\\
&f(x_3)=1{,}00404, && f(x_4)=1{,}01272, && f(x_5)=1{,}03078,\\
&f(x_6)=1{,}06283, && f(x_7)=1{,}11360, && f(x_8)=1{,}18727,\\
&f(x_9)=1{,}28690, && f(x_{10})=1{,}41421.
\end{aligned}$$

De acuerdo con la fórmula de los trapecios,

$$I\approx\frac{1}{20}\,[f(x_0)+2f(x_1)+\ldots+2f(x_9)+f(x_{10})]=\frac{21{,}81219}{20}=1{,}09061.$$

La función $f(x)=\sqrt{1+x^4}$ tiene en el segmento [0, 1] tantas derivadas continuas como se quiera. De conformidad con lo observado anteriormente, la existencia de las derivadas de orden superior al segundo no influye en la exactitud de la fórmula de los trapecios. Por eso, el error de la fórmula de los trapecios lo determinemos partiendo del hecho de existencia de la segunda derivada continua

$$f''(x)=2x^2\,(3+x^4)/(1+x^4)^{3/2}.$$

Por cuanto $M_2=\max\limits_x f''(x)=2\sqrt{2}$, el término residual de la fórmula de los trapecios vale

$$R_{10}(f)\leqslant\frac{M_2}{12N^2}=\frac{2\sqrt{2}}{12\cdot 10^2}\approx 0{,}002357.$$

Así pues,

$$I=1{,}0906\pm 0{,}0024.$$

De acuerdo con la fórmula de Simpson ($2N=10$),

$$\begin{aligned}
I\approx\frac{1}{30}\,[f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+{}&\\
+2f(x_4)+4f(x_5)+2f(x_6)+4f(x_7)+2f(x_8)+{}&\\
+4f(x_9)+f(x_{10})]=\frac{32{,}68473}{30}=1{,}08949.&
\end{aligned}$$

El término residual de la fórmula de Simpson puede determinarse tomando en consideración que $f(x)$ tiene derivada continua de cuarto orden (la existencia de las derivadas de orden superior al cuarto no influye en la exactitud de la fórmula de Simpson)

$$f^{(4)}(x) = 12\,(1 - 14x^4 + 5x^8)/(1 + x^4)^{7/2}.$$

Ya que $M_4 = \max\limits_x |f^{(4)}(x)| \leqslant 15\sqrt{2}$, entonces

$$R_5(f) \leqslant \frac{M_4}{2880N^4} \leqslant \frac{15\sqrt{2}}{2880\cdot 5^4} \leqslant 0{,}000012 < 0{,}00002.$$

De este modo,

$$I = 1{,}08949 \pm 0{,}00002,$$

es decir, la fórmula de Simpson es mucho más exacta en comparar con la de los trapecios para las funciones suficientemente suaves y para N grande.

Observación. Todos los cálculos se han realizado con ayuda de una micromáquina computadora «Electrónica Б3—18M».

Capítulo 8

Cálculo diferencial de funciones de varias variables

§ 8.1. Información preliminaria

El concepto de función de varias variables se ha introducido al final del § 3.1. Para poder estudiar las funciones $z = f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ de n variables, es decir, las funciones de los puntos $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de un espacio n-dimensional R_n ($x \in R_n$), el lector ha de poseer cierta información elemental referente a la teoría de espacio n-dimensional[1]).

La distancia[1]) entre dos puntos $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $x' = (x'_1, \ldots, x'_n)$ del espacio n-dimensional $R_n = R$ se determina según la fórmula

$$|x - x'| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - x'_j)^2}.$$

Indiquemos que si x, y, z son tres puntos del espacio R, para ellos se cumplen las desigualdades

$$|x - y| \leqslant |x - z| + |y - z|, \qquad (1)$$

$$||x| - |y|| \leqslant |x - y|. \qquad (2)$$

Estas se llaman *desigualdades triangulares*. En el espacio tridimensional tienen la siguiente interpretación geométrica: los puntos x, y, z determinan un triángulo cuyos vértices se ubican en dichos puntos y las longitudes de los lados son $|x - y|$, $|x - z|$, $|y - z|$. Por el curso de la geometría sabemos que la longitud de un lado de un triángulo no es superior a la suma de longitudes de sus lados restantes, mientras que la diferencia entre las longitudes de dos lados de un triángulo no es mayor que la longitud de su tercer lado. Esto es precisamente lo que está escrito en forma de las desigualdades (1) y (2).

---

[1]) Véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Elementos del Algebra lineal y de la geometría analítica», § 6.

En el lenguaje de las coordenadas de los puntos x, y, z la desigualdad (1) se anota del modo siguiente:

$$\left(\sum_{j=1}^{n}(x_j-y_j)^2\right)^{1/2}\leqslant\left(\sum_{j=1}^{n}(x_j-z_j)^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{j=1}^{n}(z_j-y_j)^2\right)^{1/2}. \quad (1')$$

Esta es *la desigualdad de Minkowski*[1]).

La desigualdad (2) se deduce inmediatamente de la desigualdad (1). En efecto,

$$|x|=|x-y+y|\leqslant|x-y|+|y|,$$
$$|y|=|y-x+x|\leqslant|x-y|+|x|,$$

por lo cual

$$-|x-y|\leqslant|x|-|y|\leqslant|x-y|,$$

o sea, tiene lugar (2).

Según la definición, una sucesión de puntos

$$x^1=(x_1^1,\ \ldots,\ x_n^1),$$
$$x^2=(x_1^2,\ \ldots,\ x_n^2),$$
$$x^3=(x_1^3,\ \ldots,\ x_n^3),$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

del espacio R *tiende (converge) hacia el punto* $x^0\in R$, si

$$|x^k-x^0|\rightarrow 0 \quad (k\rightarrow\infty), \quad (3)$$

es decir, si

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j^k-x_j^0)^2}\rightarrow 0. \quad (3')$$

En este caso se escribe

$$\text{lím}\ x^k=\lim_{k\to\infty}x^k=x^0,\ \text{o bien}\ x^k\rightarrow x^0$$

y se dice que el punto x^0 es el límite de la sucesión de puntos x^k. De (3') proviene

$$x_j^k\rightarrow x_j^0,\quad k\rightarrow\infty\quad (j=1,\ \ldots,\ n) \quad (3'')$$

y viceversa. De este modo, cuando decimos que una sucesión de puntos x^k converge hacia el punto x^0, esto significa sumamente igual que cada coordenada x_j^k del punto variable x^k converge a la coordenada correspondiente x_j^0 del punto x^0.

---

[1]) Véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Elementos del Algebra lineal y de la geometría analítica», el § 6.

Resultan justas las propiedades

$$\lim (x^k \pm y^k) = \lim x^k \pm \lim y^k,$$
$$\lim (\alpha x^k) = \alpha \lim x^k,$$
$$\lim (\alpha_k x) = x \lim \alpha_k \ (k \to \infty),$$

donde α y α_k son unos números. En efecto, si $\lim x^k = x^0$, $\lim y^k = y^0$, $\lim \alpha_k = \alpha_0$, entonces

$$| x^k \pm y^k - (x^0 \pm y^0) | \leqslant | x^k - x^0 | + | y^k - y^0 | \to 0,$$
$$| \alpha x^k - \alpha x^0 | = | \alpha | \, | x^k - x^0 | \to 0,$$
$$| \alpha_k x - \alpha_0 x | = | \alpha_k - \alpha_0 | \, | x | \to 0.$$

Observemos que en el espacio R podemos examinar *una curva continua* Γ. Es un conjunto de puntos

$$x = x(t) \in R, \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

dependientes del parámetro t (el cual pertenece al segmento $[a, b]$), que posee las siguientes propiedades:

$$|x(t) - x(t_0)| \underset{t \to t_0}{\to} 0, \quad t, \ t_0 \in [a, b]. \tag{4}$$

En el lenguaje de las coordenadas los puntos $x = x(t)$ de la curva Γ pueden expresarse del modo siguiente:

$$x_j = x_j(t), \quad a \leqslant t \leqslant b \quad (j = 1, \ldots, n),$$

donde $x_j(t)$ son funciones continuas de t. En realidad,

$$|x(t) - x(t_0)| = \Big(\sum_{j=1}^{n} [x_j(t) - x_j(t_0)]^2 \Big)^{1/2}.$$

Si el primer miembro de esta igualdad tiende a cero cuando $t \to t_0$, entonces, evidentemente, para cualquier $j = 1, \ldots, n$

$$x_j(t) \to x_j(t_0), \quad t \to t_0, \tag{5}$$

y, viceversa, si se cumplen las propiedades (5) para cualquier $j = 1, \ldots, n$, tiene lugar la propiedad (4).

§ 8.2. Conjunto abierto

En un espacio n-dimensional $R_n = R$ prefijemos un punto arbitrario $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Se denomina *esfera (esfera cerrada)* de radio $r > 0$ y centro en el punto citado un conjunto de puntos $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R$, para los cuales se verifica la desigualdad

$$|x - x^0| = \Big[\sum_{1}^{n} (x_j - x_j^0)^2 \Big]^{1/2} \leqslant r.$$

Llamemos *esfera abierta de radio r y centro en x^0* un conjunto de puntos x, para los cuales se verifica una desigualdad estricta

$$|x - x^0| < r.$$

Definamos *un rectángulo* en R (un rectángulo cerrado o un paralelepípedo rectangular en R) como un conjunto de puntos $x \in R$, cuyas coordenadas satisfacen las desigualdades $a_j \leqslant x_j \leqslant b_j$, ($a_j < b_j$, $j = 1, \ldots, n$). En el caso de $n = 3$ esto es un paralelepípedo rectangula. real cuyas caras son paralelas a los ejes de las coordenadas rectangulares (x_1, x_2, x_3). Podemos definir en adición *un rectángulo abierto en R* como un conjunto de puntos $x = (x_1, \ldots, x_n)$ que satisfacen las desigualdades estrictas $a_j < x_j < b_j$ ($j = 1, \ldots, n$).

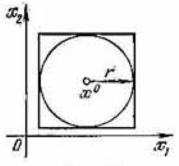


Fig. 95

Un conjunto de puntos x cuyas coordenadas satisfacen las desigualdades $|x_j - x_j^0| \leqslant a$ ($j = 1, \ldots, n$), donde $a > 0$ es un número dado, se denomina naturalmente *cubo* (o *cubo cerrado*) en R con centro en el punto x^0 y un lado de longitud $2a$. Por supuesto, cuando $n = 3$, esto será un cubo cuyas caras son paralelas a los ejes de un sistema (rectangular) de coordenadas. Por fin, *un cubo abierto* (en R) se define con ayuda de las desigualdades $|x_j - x_j^0| < a$ ($j = 1, \ldots, n$).

Todo punto x de una esfera $|x - x^0| < r$ de radio r y centro en x^0 tiene las coordenadas x_j que satisfacen la desigualdad

$$|x_j - x_j^0| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)^2\right)^{1/2} < r.$$

Esto muestra que el punto x pertenece al cubo

$$|x_j - x_j^0| < r \quad (j = 1, \ldots, n).$$

De este modo, *una esfera de radio r y centro en el punto x^0 pertenece al cubo de lado $2r$ con el mismo centro*. La fig. 95 explica este hecho en el caso bidimensional. *Un cubo*

$$|x_j - x_j^0| < a \quad (j = 1, \ldots, n)$$

de lado $2a$ y centro x^0 pertenece, a su vez, a una esfera con el mismo centro y radio igual a $a\sqrt{n}$, porque para las coordenadas de los puntos de este cubo se verifica la desigualdad

$$\left(\sum_{j=1}^{n} (x_j - x_j^0)^2\right)^{1/2} < \left(\sum_{j=1}^{n} a^2\right)^{1/2} = a\sqrt{n}.$$

Para el caso bidimensional este hecho se explica en la fig. 96.

Hemos examinado las esferas y los cubos abiertos, pero nuestros razonamientos son ciertos también para los cubos y bolas cerrados.

Definamos un conjunto arbitrario E de puntos $x \in R$. Por definición, x^0 se denomina *punto interior del conjunto E*, si existe una esfera abierta con centro en dicho punto perteneciente enteramente a E. La palabra «*esfera*» aquí puede sustituirse por la palabra «*cubo*», puesto que en cada esfera está contenido cierto cubo con el mismo centro, y viceversa.

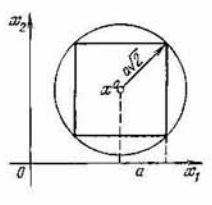


Fig. 96

Un conjunto se denomina *abierto*, si todos los puntos de él son interiores. Esta definición puede enunciarse también así: *un conjunto E es abierto, siempre que del hecho de que un cierto punto pertenece a este conjunto se deduce que dicho punto es interior*. De aquí se ve que *un conjunto vacío es abierto*.

Una esfera abierta

$$|x - x^0| < r \tag{1}$$

es un conjunto abierto. Efectivamente, sea y un punto perteneciente a la esfera (1), es decir, $|y - x^0| = \rho < r$, y sea x un punto arbitrario perteneciente a la esfera

$$|x - y| < \varepsilon \quad (\varepsilon < r - \rho). \tag{2}$$

Para este último se verifica

$$|x - x^0| = |x - y + y - x^0| \leqslant |x - y| + \\ + |y - x^0| < \varepsilon + \rho < r.$$

Esto es indicio de que la esfera (2) pertenece a la esfera (1). De este modo, el punto y es interior y la esfera (1) es un conjunto abierto.

Dejamos a cargo del mismo lector demostrar que *un rectángulo abierto*, en particular, un cubo abierto *es un conjunto abierto*.

Se denomina *entorno del punto $x^0 \in R$* un conjunto abierto arbitrario en el que está contenido el punto citado. Es evidente que *la intersección de dos entornos del punto x^0 es, a su vez, un entorno del punto x^0*.

Teniendo presente lo dicho anteriormente, podemos también definir el concepto de punto interior del conjunto E así: *x^0 es un punto interior de E, si existe un entorno del punto x^0 perteneciente a E*. En efecto, si x^0 es un punto interior según la definición primera, se encontrará una esfera abierta, perteneciente a E, con centro en x^0, más la esfera citada es el entorno de x^0. Viceversa, si x^0 es un punto interior según la definición segunda, existe un entorno de x^0 (perteneciente a E) el cual, siendo un conjunto abierto, contiene una esfera abierta cuyo centro se ubica en x^0.

En lo sucesivo nos dispondremos de muchos ejemplos de conjuntos abiertos. Pero ahora recurrimos a la intuición geométrica del lector y diremos a grandes rasgos que si quitamos la frontera de un cuerpo geométrico arbitrario, obtendremos un conjunto abierto.

En los párrafos que siguen abajo se examinarán las funciones $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ de n variables $x_1, \ldots, x_n$, o bien, que es lo mismo, del punto $x = (x_1, \ldots, x_n)$, definidas en los conjuntos abiertos de un espacio n-dimensional.

Un conjunto E se llama *conexo*, si sus dos puntos cualesquiera x', x'' pueden unirse mediante una curva perteneciente a este conjunto, es decir, si existe una función vectorial continua $x = x(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, tal que $x(0) = x'$, $x(1) = x''$, $x(t) \in E$ (véase el § 8.1).

Se denomina *segmento* $\overline{x'x''}$ una curva (continua, evidentemente) $x(t) = tx' + (1 - t)x''$, $t \in [0, 1]$ que une los puntos x', x''. Un conjunto abierto conexo lleva el nombre de *dominio*.

§ 8.3. Límite de una función

En el § 3.2 hemos examinado el concepto de límite de una función de una sola variable. Aquí este concepto se generaliza para el caso de una función de varias variables.

Por definición, *la función* $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ *tiene límite en el punto* $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, igual al número A y designado así:

$$\lim_{x \to x^0} f(x) = \lim_{\substack{x_j \to x_j^0 \\ (j=1, \ldots, n)}} f(x_1, \ldots, x_n) = A \tag{1}$$

(suele escribirse, además, $f(x) \to A$ $(x \to x^0)$), si dicha función está definida en cierto entorno del punto x^0, a excepción, quizás, del propio punto, y si existe el límite

$$\lim_{\substack{|x^k - x^0| \to 0 \\ x^k \neq x^0}} f(x^k) = A, \tag{2}$$

cualquiera que sea la sucesión de puntos x^k (la que tienda a x^0) del entorno mencionado ($k = 1, 2, \ldots$), distintos de x^0 (véase el § 8.1).

La otra definición equivalente consiste en lo siguiente: *la función f tiene en el punto x^0 un límite, igual a A*, si está definida en cierto entorno del punto x^0, a excepción, quizás, del mismo punto, y si para cualquier $\varepsilon > 0$ se encontrará un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - A| < \varepsilon \tag{3}$$

para todos los x que satisfacen las desigualdades

$$0 < |x - x^0| < \delta. \tag{4}$$

Esta definición es, a su vez, equivalente a la siguiente: para cualquier $\varepsilon > 0$ existe tal entorno $U(x^0)$ del punto x^0 que se verifica la desigualdad (3), cualquiera que sea $x \in U(x^0)$, $x \neq x^0$.

Enunciemos el criterio de Cauchy para la existencia de límite (demostrado igual que en el caso unidimensional) (véase el § 3.2, el teorema 5).

Para que la función f tenga en el punto x^0 un límite (finito), es necesario y suficiente que para cualquier $\varepsilon > 0$ exista un entorno $U(x^0)$ (en particular, un cubo o una esfera con centro en x^0) *tal que, cualesquiera que sean x, $x' \in U(x^0)$ distintos de x^0, tenga lugar la desigualdad*

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Es obvio que si el número A es un límite de $f(x)$ en x^0, entonces A es también el límite de la función $f(x^0+h)$ de h en el punto nulo:

$$\lim_{h\to 0} f(x^0+h) = A,$$

y viceversa.

Examinemos una función f, dada en todos los puntos del entorno del punto x^0, a excepción, quizás, del propio punto x^0: sea $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ un vector arbitrario de longitud unidad ($|\omega| = 1$) y sea $t \geqslant 0$ un escalar. Los puntos del tipo $x^0 + t\omega$ $(0 \leqslant t)$ forman *un rayo que tiene por origen x^0 y está orientado en la dirección del vector* ω. Para todo ω puede estudiarse una función

$$f(x^0 + t\omega) = f(x_1^0 + t\omega_1, \ldots, x_n^0 + t\omega_n)$$
$$(0 < t < \delta_\omega)$$

de la variable escalar t, donde δ_ω es un número dependiente de ω. El límite de esta función (de una sola variable t)

$$\lim_{t\to 0,\ t>0} f(x^0+t\omega) = \lim_{t\to 0,\ t>0} f(x_1^0+t\omega_1, \ldots, x_n^0+t\omega_n),$$

si existe, sería natural llamar *límite de f en el punto x^0 en la dirección del vector* ω.

EJEMPLO 1. Analicemos las funciones

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^3+x_2^3}{x_1^2+x_2^2} \quad \text{y} \quad \varphi(x_1, x_2) = \frac{x_1^2-x_2^2}{x_1^2+x_2^2}.$$

Estas funciones están definidas en el plano (x_1, x_2), salvo en el punto $x^0 = (0, 0)$. Tenemos (se debe tomar en consideración que $|x_1|^3 \leqslant (x_1^2 + x_2^2)^{3/2}$)

$$|f(x_1, x_2)| \leqslant \frac{2(x_1^2+x_2^2)^{3/2}}{x_1^2+x_2^2} = 2(x_1^2+x_2^2)^{1/2} = 2|x| = 2|x-x^0|,$$

de donde

$$\lim_{x_1, x_2 \to 0} f(x_1, x_2) = 0$$

(para $\varepsilon > 0$ suponemos $\delta = \varepsilon/2$, y, entonces, $|f(x_1, x_2)| < \varepsilon$, siempre que $|x| < \delta$).

Luego, considerando que k es una constante, tenemos $x_2 = kx_1$ y

$$\varphi(x_1, kx_1) = \frac{1-k^2}{1+k^2},$$

de donde se ve que el límite de φ en $(0, 0)$ según las direcciones diferentes es, en el caso general, distinto. Por esta razón φ no tiene límite en $(0, 0)$.

EJEMPLO 2. Estudiemos en R_2 una función

$$f(x, y) = x^2y/(x^4 + y^2), \quad x^4 + y^2 \neq 0.$$

En el punto $(0, 0)$ de cualquier recta $y = kx$, que pasa por el origen de coordenadas, la función en consideración tiene un límite igual a cero:

$$f(x, kx) = kx^3/(x^4 + k^2x^2) = kx/(x^2 + k^2) \to 0,$$
$$\text{cuando } x \to 0.$$

Sin embargo, esta función no tiene límite en el punto $(0, 0)$, pues, para $y = x^2$

$$f(x, x^2) = x^4/(x^4 + x^4) = 1/2 \text{ y}$$
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y = x^2}} f(x, x^2) = 1/2.$$

Escribiremos $\lim_{x \to x^0} f(x) = \infty$, si la función f está definida en cierto entorno de x^0, a excepción, quizás, de x^0, y si para cualquier $N > 0$ existe tal $\delta > 0$ que $|f(x)| > N$, siempre que $0 < |x - x^0| < \delta$.

Se puede hablar de un límite de f, cuando $x \to \infty$:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A. \tag{5}$$

Por ejemplo, si A es un número finito, la igualdad (5) se debe entender en el sentido de que para todo $\varepsilon > 0$ podemos indicar tal $N > 0$ que para los puntos x, donde $|x| > N$, la función f queda definida y tiene lugar la desigualdad $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Son válidas las igualdades

$$\lim_{x\to x^0} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x\to x^0} f(x) \pm \lim_{x\to x^0} \varphi(x), \tag{6}$$

$$\lim_{x\to x^0} (f(x)\cdot\varphi(x)) = \lim_{x\to x^0} f(x) \lim_{x\to x^0} \varphi(x), \tag{7}$$

$$\lim_{x\to x^0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x^0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x^0} \varphi(x)} \quad (\lim_{x\to x^0} \varphi(x) \neq 0), \tag{8}$$

donde puede ser que $x^0 = \infty$. Como siempre ocurre en estos casos, los límites (finitos) en los primeros miembros existen, si existen los límites de f y de φ. Demostremos, a título de ejemplo, (7).

Sea $x^k \to x^0$ $(x^k \neq x^0)$; entonces

$$\lim_{x^k\to x^0} (f(x^k)\varphi(x^k)) = \lim_{x^k\to x^0} f(x^k)\cdot \lim_{x^k\to x^0} \varphi(x^k) =$$
$$= \lim_{x\to x^0} f(x) \lim_{x\to x^0} \varphi(x). \tag{9}$$

De este modo, el límite en el primer miembro de (9) existe y es igual al segundo miembro de (9), y, como la sucesión $\{x^k\}$ es arbitraria, es igual al límite de la función $f(x)\,\varphi(x)$ en el punto x^0.

TEOREMA 1. *Si una función f tiene un límite distinto de cero en el punto x^0,*

$$\lim_{x\to x^0} f(x) = A \neq 0,$$

existe un $\delta > 0$ tal que para todos los x que satisfacen las desigualdades

$$0 < |x - x^0| < \delta, \tag{10}$$

la función citada satisface la desigualdad

$$|f(x)| > |A|/2. \tag{11}$$

Más aún, conserva invariable el signo del número A.

Efectivamente, al poner $\varepsilon = |A|/2$, encontraremos tal $\delta > 0$ que para todos los x que satisfacen las desigualdades (10) se verifique

$$|f(x) - A| < |A|/2. \tag{12}$$

Por eso, para tales x tenemos

$$|A|/2 > |A - f(x)| \geqslant |A| - |f(x)|,$$

es decir, tiene lugar (11). De (12) se deduce para los x citados:

$$A - \frac{|A|}{2} < f(x) < A + \frac{|A|}{2},$$

de donde $A/2 < f(x)$ para $A > 0$, y $f(x) < A/2$ para $A < 0$ (conservación del signo).

Observación. En el § 8.12 se dará una definición más general del límite de una función definida en un conjunto arbitrario.

§ 8.4. Función continua

Por definición, una función $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ *es continua en el punto* $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, si está definida en cierto entorno suyo, el punto x^0 incluido, y si su límite en el punto x^0 es igual al valor de la misma en x^0:

$$\lim_{x \to x^0} f(x) = f(x^0). \quad (1)$$

La condición de continuidad de f en el punto x^0 puede escribirse en la forma equivalente:

$$\lim_{h \to 0} f(x^0 + h) = f(x^0), \quad (1')$$

es decir, la función $f(x)$ es continua en el punto x^0, si es continua en el punto $h = 0$ la función $f(x^0 + h)$ del punto h.

Podemos introducir también un incremento de f en el punto x^0, correspondiente al incremento $h = (h_1, \ldots, h_n)$,

$$\Delta_h f(x^0) = f(x^0 + h) - f(x^0)$$

y definir en el lenguaje de éste la continuidad de f en x^0: *la función f es continua en x^0, si*

$$\lim_{h \to 0} \Delta_h f(x^0) = \lim_{h_1, \ldots, h_n \to 0} [f(x_1^0 + h_1, \ldots, x_n^0 + h_n) - \\ - f(x_1^0, \ldots, x_n^0)] = 0. \quad (1'')$$

El incremento $\Delta f(x^0)$ se denomina, además, *incremento total* de la función f en el punto x^0.

De las fórmulas (6) — (8) § 8.3 se deduce directamente el siguiente teorema.

TEOREMA 1. *La suma, la diferencia, el producto y el cociente de las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$, continuas en el punto x^0, es una función continua en el mismo punto, si, por supuesto, $\varphi(x^0) \neq 0$ en el caso del cociente.*

Una constante c puede considerarse como función $f(x) = c$ de $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Es continua para cualquier x, puesto que

$$f(x + h) - f(x) = c - c = 0 \to 0 \quad (h \to 0).$$

Una función más complicada es $f_j(x) = x_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, donde el índice j puede ser igual a uno de los valores $1, \ldots, n$. Es también continua (como una función de $x = (x_1, \ldots, x_n)$!). En efecto, sea $h = (h_1, \ldots, h_n)$; entonces

$$|f_j(x + h) - f_j(x)| = |(x_j + h_j) - x_j| = |h_j| \leqslant |h| \to 0 \\ (h \to 0).$$

Al realizar sobre las funciones x_j y las constantes un número finito de las operaciones de adición, sustracción y multiplicación, obtendremos las funciones que se llaman *polinomios de x o de $(x_1, \ldots, x_n)$*. En virtud de las propiedades enunciadas anteriormente, *los polinomios resultan ser funciones continuas* en R_n (para todos los $x \in R_n$). La razón P/Q entre dos polinomios es *una función racional* que es, evidentemente, continua en todo punto de R_n, a excepción de los puntos x, donde $Q(x) = 0$.

Una función

$$P(x) = x_1^3 - x_2^3 + x_1^2x_3 + 2x_1^2x_2 - 3x_3^2 + 4$$

puede servir de ejemplo de un polinomio de (x_1, x_2, x_3) de tercer grado.

Resulta válido el siguiente

TEOREMA 2. *Sea $f(x) = f(x_1, \ldots, x_m)$ una función continua en el punto $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_m^0)$ del espacio R_m (de los puntos x), y sean $\varphi_j(u) = \varphi_j(u_1, \ldots, u_n)$ las funciones continuas en el punto $u^0 = (u_1^0, \ldots, u_n^0)$ del espacio R_n* (de los puntos u). *Supongamos, además, que $\varphi_j(u^0) = x_j^0$ $(j = 1, \ldots, m)$. Entonces la función*

$$F(u) = f(\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_m(u))$$

es continua (respecto de u) en el punto u^0.

Demostración. Por cuanto f es continua en x^0, para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede indicar tal $\delta > 0$ que f esté definida para todos los x, para los cuales $|x_j - x_j^0| < \delta$ $(j = 1, \ldots, m)$ y para ellos se verifica la desigualdad $|f(x) - f(x^0)| < \varepsilon$, y, como las funciones φ_j son continuas en el punto u^0 del espacio R_n, podemos, por tanto, determinar tal $\eta > 0$ que para los puntos $u \in R_n$ de la esfera $|u - u^0| < \eta$ se verifiquen las desigualdades

$$|\varphi_j(u) - \varphi_j(u^0)| < \delta \quad (j = 1, \ldots, m).$$

Entonces se verifica también la desigualdad

$$|F(u) - F(u^0)| = \\ = |f(\varphi_1(u), \ldots, \varphi_m(u)) - f(\varphi_1(u^0), \ldots \\ \ldots, \varphi_m(u^0))| < \varepsilon,$$

y el teorema queda demostrado.

Una función se llamará *función elemental* de las variables $x_1, \ldots, x_n$, si puede obtenerse de las variables y constantes c citadas por medio de un número finito de operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y las operaciones φ, donde φ son

funciones elementales de una sola variable (véase el § 3.8). Las funciones

1) $\operatorname{sen} \ln \sqrt{1+x^2+y^2} = f_1$,

2) $\operatorname{sen}^2 x + \cos^3 (x+y) = f_2$,

3) $\ln \frac{x-y}{x+y} = f_3$

pueden servir de ejemplo de las funciones elementales.

Haciendo uso de los teoremas 1, 2, podemos demostrar con facilidad que las funciones f_1 y f_2 son continuas en el plano (x, y), mientras que la función f_3 está, evidentemente, definida y es continua en aquellos puntos (x, y), para los cuales la fracción $(x-y)/(x+y)$ es positiva y finita.

Del teorema 1 del § 8.3 y de la definición de continuidad de una función en un punto se deduce directamente

TEOREMA 3. *Una función $f(x) = f \times \times (x_1, \ldots, x_n)$, continua en el punto x^0 y distinta de cero en dicho punto, conserva invariable el signo de $f(x^0)$ en cierto entorno del punto citado.*

Fig. 97

COROLARIO. *Supongamos que la función $f(x)$ está definida y es continua en R_n (en todos los puntos de R_n). Entonces un conjunto G de puntos x, donde ella satisface la desigualdad $f(x) > c$ (o bien $f(x) < c$), cualquiera que sea la constante c, es abierto.*

En efecto, la función $F(x) = f(x) - c$ es continua en R_n y un conjunto de todos los puntos x, donde $F(x) > 0$, coincide con G. Sea $x^0 \in G$, entonces existe una esfera

$$|x - x^0| < \delta,$$

en la cual $F(x) > 0$, es decir, la esfera pertenece a G y el punto $x^0 \in G$ es interior para G.

El caso en que $f(x) < c$ se demuestra por analogía.

EJEMPLO. Las funciones

$$f_1(x) = \sum_{1}^{n} \frac{x_k^2}{a_k} \quad (a_k > 0);$$

$$f_2(x) = \sum_{1}^{n} |x_k|,$$

están definidas y son continuas en R_n.

En este caso los conjuntos de los valores de x, para los cuales se cumplen las desigualdades $f_i(x) < c$ $(i = 1, 2)$, son abiertos. El primero de ellos es el interior de un elipsoide en el espacio n-dimensional; el segundo es, para $n = 2$, el interior del cuadrado expuesto en la fig. 97.

Las desigualdades $f_i(x) > c > 0$ especifican los exteriores de las figuras indicadas.

§ 8.5. Derivadas parciales y derivadas direccionales

En este párrafo se estudiarán las funciones f definidas en un conjunto abierto arbitrario $G \subset R_n$.

Llamemos *incremento de f en el punto $x = (x_1, \ldots, x_n)$ $(\in G)$ respecto de la variable x_j de paso h una magnitud*

$$\Delta_{x_j h} f(x) = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + h, x_{j+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_n),$$

donde h es un número real, suficientemente pequeño para que dicha magnitud tenga sentido.

Se denomina *derivada parcial respecto de x_j en el punto x* un límite

$$f'_{x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta_{x_j h} f(x)}{h}$$
$$(j = 1, \ldots, n),$$

si existe. La derivada parcial $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}$ es una derivada corriente de la función $f(x_1, \ldots, x_n)$, considerada como función de una sola variable x_j, siendo fijos $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$.

En un espacio tridimensional dotado del sistema rectangular de coordenadas (x, y, z) una función de dos variables $z = f(x, y)$ se expresa mediante una superficie, esto es, un lugar geométrico de los puntos $(x, y, f(x, y))$, donde $(x, y) \in G$. Es evidente que *la magnitud $f'_x(x_0, y_0)$* (si existe) *es igual a la tangente del ángulo de inclinación respecto del eje x de la línea tangente a la sección de dicha superficie por el plano $y = y_0$ en el punto de abscisa x_0.*

Si una función $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ tiene derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ $(k = 1, \ldots, n)$ en todos los puntos $x = (x_1, \ldots, x_n) \in G$, dichas derivadas pueden considerarse como ciertas funciones nuevas definidas en el conjunto G.

Por lo tanto podemos plantear la cuestión acerca de la existencia de las derivadas parciales de éstas últimas respecto de alguna variable en el punto x.

Si la función $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ tiene derivada parcial respecto nuevamente de la variable x_k, la denominan *derivada parcial de segundo orden de la función $f(x)$* respecto de x_k y denotan $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$. De este modo, por definición,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\frac{\partial f}{\partial x_k}\right\}.$$

Si existe una derivada parcial de la función $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ respecto de alguna otra variable x_i $(i \neq k)$, ésta última se llama *derivada parcial mixta de segundo orden y se designa mediante el símbolo*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right).$$

Para una función de dos variables $f(x, y)$ se pueden examinar cuatro derivadas de segundo orden

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Si las derivadas de segundo orden (todas o una de ellas) existen para todos los $x \in G$, puede surgir la cuestión sobre la existencia de las derivadas parciales de tercer orden.

En general, se denominará *derivada parcial de n-ésimo orden* la derivada parcial respecto de alguna de las variables de cierta derivada de $(n-1)$-ésimo orden. Por ejemplo,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\right) = \frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}.$$

Las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ se llamarán *derivadas parciales de primer orden*, y la propia *función* f, *derivada parcial de orden nulo.*

Con el fin de designar las derivadas parciales, se emplearán, además, los siguientes símbolos:

$$D_{x_1} f = \frac{\partial f}{\partial x_1},$$

$$D_{x_1} D_{x_2} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{x^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}.$$

Si $r = (r_1, \ldots, r_n)$ es un vector de coordenadas enteras no negativas, se escribirá

$$D^r f = D^{r_1}_{x_1} \ldots D^{r_n}_{x_n} f = \frac{\partial^{r_1 + \ldots + r_n} f}{\partial x_1^{r_1} \ldots \partial x_n^{r_n}}.$$

EJEMPLO. Hállese $\frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y^2}$ de la función $f(x, y) = x^2 + \operatorname{sen} xy$.

Tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cos xy, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x^2 \operatorname{sen} xy,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y^2} = -2x \operatorname{sen} xy - x^2 y \cos xy$$

Surge naturalmente una pregunta de si sean iguales las derivadas parciales, si están calculadas respecto de unas mismas variables un mismo número de veces, mas en el orden distinto. Por ejemplo, ¿serán iguales

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x\, \partial y^2\, \partial x} \text{ y } \frac{\partial^4 f}{\partial x^2\, \partial y^2}?$$

En el caso general la respuesta a esta pregunta será negativa. No obstante, tiene lugar el siguiente teorema el cual se enunciará para la función de dos variables.

TEOREMA (DE DERIVADAS MIXTAS). *Supongamos que la función* $u = f(x, y)$ *está definida junto con sus derivadas parciales* $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$ *en cierto entorno del punto* $P_0 = (x_0, y_0)$, *con la particularidad de que* $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$ *y* $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$ *son continuas en el punto* P_0, *entonces*

$$\frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f(P_0)}{\partial y\, \partial x},$$

es decir, en este caso el resultado de la diferenciación no depende del orden en que se realiza la diferenciación.

Omitimos aquí la demostración de este teorema y nos limitamos a las siguientes observaciones.

Observación 1. Este teorema se extiende con facilidad por inducción a cualesquiera derivadas parciales mixtas continuas que se diferencian una de la otra sólo por el orden de la diferenciación. Por ejemplo,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]\right\} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]\right\} =$$
$$= \frac{\partial^3 f}{\partial y\, \partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]\right\} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\, \partial x}.$$

Observación 2. Si la condición de continuidad mencionada está ausente, las derivadas mixtas pueden ser diferentes en el punto P_0. Analicemos una función

$$f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^2 + y^2}, \quad \text{si } x^2 + y^2 \neq 0, \text{ y } f(0, 0) = 0.$$

Es fácil calcular que

$$f'_x(x, y) = y\,\frac{x^4 + 3x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{para } x^2 + y^2 \neq 0 \text{ y}$$

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0;$$

$$f'_y(x, y) = x^3\,\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{para } x^2 + y^2 \neq 0, \text{ y } f'_y(0, 0) = 0.$$

Luego, por definición,

$$f''_{xy}(0, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'_y(x, 0) - f'_y(0, 0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x-0}{x} = 1,$$

$$f''_{yx}(0, 0) = \lim_{y\to 0} \frac{f'_x(0, y) - f'_x(0, 0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0,$$

es decir,

$$f''_{xy}\ (0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0).$$

Hemos de notar que las derivadas parciales f''_{xy} y f''_{yx} son discontinuas en el punto (0, 0), por ejemplo $f''_{yx}(x, y) = \frac{x^6 + 6x^4y^2 - 3x^2y^4}{(x^2+y^2)^3}$ para $x^2 + y^2 \neq 0$, de donde se ve que

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x=y}} f''_{yx}(x, y) = \frac{1}{2} \neq f''_{yx}(0, 0) = 0.$$

Se puede introducir en adición el concepto de *derivada direccional*. En el caso de una función de una sola variable este concepto no se emplea.

Sea $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ un vector unidad arbitrario. Se denomina *derivada direccional de la función f en el punto x según la dirección ω* el límite

$$\frac{\partial f}{\partial \omega} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{f(x + t\omega) - f(x)}{t}$$

(si existe). Subrayemos que al calcular este límite se supone que t tiende a cero tomando siempre valores *positivos*, por lo tanto podemos decir, además, que $\frac{\partial f(x)}{\partial \omega}$ *es una derivada derecha en el punto $t = 0$ de la función $f(x + t\omega)$ respecto de t.*

Al igual que en el caso de una función de una sola variable, se puede hablar de las derivadas parciales derecha e izquierda respecto de x_j. Se debe tener en cuenta que *la derivada direccional según el eje positivo x_j coincide con la derivada parcial derecha respecto de x_j, sin embargo, la derivada según el eje negativo x_j tiene el signo opuesto al de la derivada izquierda respecto de x_j.*

§ 8.6. Funciones diferenciables

8.6.1. Diferenciabilidad de las funciones en un punto

Examinemos, para simplificar, el caso tridimensional; en el caso n-dimensional los razonamientos son análogos. El caso en que $n = 1$ se ha analizado especialmente en el § 4.7.

Supongamos que en un conjunto abierto $G \subset R_3$ está prefijada una función $u = f(x, y, z)$ que tiene en el punto $(x, y, z) \in G$ deri-

vadas parciales continuas de primer orden. Esto implica automáticamente que dichas derivadas parciales existen en cierto entorno del punto (x, y, z), aunque, quizás, en los puntos distintos de (x, y, z) ellas no son continuas. Veamos un incremento de f en (x, y, z), correspondiente al incremento $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, donde $|\Delta x|$, $|\Delta y|$, $|\Delta z|$ son inferiores a δ, y δ es suficientemente pequeño para que el punto $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ no salga fuera del entorno mencionado. Tienen lugar las igualdades (las explicaciones vienen más abajo):

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z) = \quad (1)$$

$$= f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y + \Delta y, z + \Delta z) + \quad (2)$$

$$+ f(x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z + \Delta z) + \quad (3)$$

$$+ f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z) = \quad (4)$$

$$= f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)\, \Delta x +$$

$$+ f'_y(x, y + \theta_2 \Delta y, z + \Delta z)\, \Delta y + f'_z(x, y, z + \theta_3 \Delta z)\, \Delta z = \quad (5)$$

$$= f'_x(x, y, z) + \varepsilon_1)\, \Delta x + (f'_y(x, y, z) + \varepsilon_2)\, \Delta y +$$

$$+ (f'_z(x, y, z) + \varepsilon_3)\, \Delta z = \quad (6)$$

$$= f'_x(x, y, z)\, \Delta x + f'_y(x, y, z)\, \Delta y + f'_z(x, y, z)\, \Delta z + o(\rho) \quad (7)$$

$$(\rho \to 0).$$

$$0 < \theta_1, \theta_2, \theta_3 < 1, \ \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}, \ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \to 0 \quad (8)$$

$$(\rho \to 0).$$

El paso de (2) al primer término de (5) se argumenta así: la función $f(\xi, y + \Delta y, z + \Delta z)$ de ξ (siendo fijos $y + \Delta y$, $z + \Delta z$) tiene por hipótesis una derivada (respecto de ξ) en el segmento $[x, x + \Delta x]$, y a dicha derivada puede ser aplicado el teorema de Lagrange del valor medio. Los términos segundo y tercero de (5) se explican análogamente. El paso de (5) a (6) es puramente formal: hemos puesto, por ejemplo,

$$f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) = f'_x(x, y, z) + \varepsilon_1.$$

No obstante, no es del todo formal el hecho de que $\varepsilon_1 \to 0$ cuando $\rho \to 0$. Este se deduce de continuidad supuesta de f'_x en el punto (x, y, z). Por fin, el paso de (6) a (7) se reduce a la afirmación que hay la igualdad

$$\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z = o(\rho) \quad (\rho \to 0).$$

En realidad, puesto que $|\Delta x|$, $|\Delta y|$, $|\Delta z| \leqslant \rho$, entonces, cuando $\rho \to 0$ se tiene

$$|\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z|/\rho \leqslant |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| + |\varepsilon_3| \to 0.$$

Se ha demostrado el teorema de importancia:

TEOREMA 1. *Si una función $u = f$ tiene derivadas parciales continuas (de primer orden) en el punto (x, y, z), su incremento en dicho punto, correspondiente al incremento suficientemente pequeño $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ puede escribirse según la fórmula*

$$\Delta u = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z + o(\rho) \quad (\rho \to 0), \tag{9}$$
$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2},$$

donde las derivadas parciales se toman en el punto (x, y, z).

Ya que los valores de las derivadas parciales en el segundo miembro de (9) no dependen de Δx, Δy, Δz, entonces, de la hipótesis del teorema 1 se infiere que el incremento de f en (x, y, z), correspondiente al incremento $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, puede escribirse según la fórmula

$$\Delta u = A\,\Delta x + B\,\Delta y + C\,\Delta z + o(\rho) \quad (\rho \to 0), \tag{10}$$

donde los números A, B, C no dependen de Δx, Δy, Δz.

Demos a conocer la siguiente definición: si el incremento de la función f en el punto (x, y, z) para $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ suficientemente pequeños puede ser escrito en forma de la suma (10), donde A, B, C son los números independientes de Δx, Δy, Δz, suele decirse que la función f *es diferenciable en el punto* (x, y, z). De este modo, *la diferenciabilidad de una función f en (x, y, z) consiste en que su incremento Δf en dicho punto puede ser escrito en forma de la suma de dos sumandos: el primer sumando es una función lineal $A\,\Delta x + B\,\Delta y + C\,\Delta z$ de $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ y se denomina parte principal lineal del incremento Δf; el segundo sumando, en general depende (de una manera muy complicada) de los incrementos Δx, Δy, Δz, pero, si hacemos tenderlos a cero, el segundo sumando tenderá a cero con mayor rapidez que $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$.*

Es fácil ver que si la función f es diferenciable en el punto (x, y, z), es decir, si es representable mediante la igualdad (10), tiene en el punto citado las derivadas parciales de primer orden que valen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = B, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = C. \tag{11}$$

Por ejemplo, la primera igualdad de (11) se demuestra así: supongamos que el incremento de f en (x, y, z) se escribe según la fórmula (10). Si ponemos en la última $\Delta x = h$, $\Delta y = \Delta z = 0$, obtendremos la igualdad $\Delta_{xh} u = Ah + o(h)$ $(h \to 0)$. Al dividirla por h y pasar al límite, obtendremos

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta_{xh} u}{h} = \frac{\partial f}{\partial x} = A.$$

De lo dicho se deduce

TEOREMA 2. *Para que la función f sea diferenciable en un punto, es necesario que tenga en dicho punto derivadas parciales y es suficiente que tenga en el mismo punto derivadas parciales continuas.*

Recordemos, para que una función f de una sola variable sea diferenciable en un punto x, es necesario y suficiente que tenga derivada en este punto.

De (10) se deduce que *si una función es diferenciable en un punto, es forzosamente continua en este punto.*

EJEMPLO 1. Una función $f(x, y, z)$, igual a cero en los planos coordenados $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, y a uno en los demás puntos de R_3, tiene, evidentemente, derivadas parciales que son nulas en el punto $(0, 0, 0)$, pero es, obviamente, discontinua en este punto y por esta razón no puede ser diferenciable en él. De este modo, una sola condición de que en un punto existan derivadas parciales no es suficiente para que una función sea diferenciable e incluso continua en el punto citado.

Indiquemos la diferencia que existe entre el caso multidimensional y el unidimensional. Cuando $n = 1$, la propiedad de diferenciabilidad de f en x se anota en forma de la igualdad $\Delta f = A\Delta x + o(\Delta x)$, por consiguiente, si $A \neq 0$, el resto tiende a cero, para $\Delta x \to 0$, con la mayor rapidez que la parte principal. No será asi, cuando $n > 1$, por ejemplo, para $n = 3$, cualesquiera que sean los números A, B, C, no nulos simultáneamente, siempre podemos hacer tender Δx, Δy, Δz hacia cero de un modo tal que se verifique siempre la igualdad $A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z = 0$ pero, en este caso, en (10) el término residual $o(\rho)$ es, en general, mayor que el principal. Sin embargo, si hacemos tender Δx, Δy, Δz hacia cero de modo tal que se cumpla la proporcionalidad $\Delta x : \Delta y : \Delta z = A : B : C$, entonces la parte principal del incremento representará una magnitud cuyo orden es estrictamente igual al de ρ, y el resto tenderá a cero más rápidamente que la parte principal.

EJEMPLO 2. Una función $u = |x|(y + 1)$ es continua en el punto $(0, 0)$. No obstante, es fácil ver que en este punto no existe la derivada $\frac{\partial u}{\partial x}$. Por consiguiente, u no es diferenciable en el punto $(0, 0)$.

Si una función f es diferenciable en el punto (x, y, z), la parte lineal principal de su incremento en este punto se llamará, además, *diferencial de f en el punto citado, correspondiente a los incrementos $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ de las variables independientes.* La diferencial se escribe así:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z.$$

Sobre otras desginaciones hablaremos en el § 8.9.

8.6.2. Aplicación de la diferencial en los cálculos aproximados

Analicemos a título de ejemplo una función

$$z = f(x, y) \tag{12}$$

de dos variables, la cual se supondrá diferenciable.

Nuestro deseo es calcular dicha función en el punto (x, y), donde

$$x = \pm\alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \ldots$$
$$y = \pm\beta_0, \beta_1, \beta_2 \ldots .$$

Escribamos los valores aproximados de estos números en forma de las fracciones decimales finitas

$$x + \Delta x = \pm\alpha_0, \alpha_1 \ldots \alpha_k$$
$$y + \Delta y = \pm\beta_0, \beta_1 \ldots \beta_l. \qquad (13)$$

De este modo, tienen lugar las igualdades aproximadas

$$x \approx x + \Delta x, \quad y \approx y + \Delta y,$$

cuyos errores absolutos de aproximación satisfacen las desigualdades

$$|\Delta x| \leqslant 10^{-k}, \quad |\Delta y| \leqslant 10^{-l}.$$

Si en la función f sustituimos x, y por $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, respectivamente, obtendremos una igualdad aproximada

$$f(x, y) \approx f(x + \Delta x, y + \Delta y) \qquad (14)$$

con un error absoluto

$$|\Delta z| = |f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)|,$$

el cual puede ser aproximadamente sustituido, para Δx, Δy suficientemente pequeños, por la diferencial de la función f en el punto (x, y):

$$|\Delta z| \approx |dz|, \quad dz = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y.$$

De aquí obtenemos una desigualdad

$$|\Delta z| \leqslant \left|\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right|. \qquad (15)$$

Esta desigualdad es, de hecho, aproximada, puesto que se ha obtenido siendo menospreciada cierta magnitud, aunque ésta última es considerablemente inferior a Δx, Δy.

Fijémonos en el hecho de que las fracciones decimales finitas $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ se hacen cada vez más engorrosas al decrecer $|\Delta x|$, $|\Delta y|$. Por eso, calculando el número $f(x + \Delta x, y + \Delta y)$ hemos de preocuparnos no sólo de que este número aproxime $f(x, y)$ de un modo adecuado, sino que también del menor volumen posible de los cálculos a realizar. Teniendo presente esta observación, concluimos de la desigualdad (15): si hace falta que el error absoluto $|\Delta z|$ no sobrepase una magnitud pequeña prefijada, la cual se designará con 2λ, podemos conseguirlo al elegir tales números $|\Delta x|$,

$|\Delta y|$ que se verifiquen las desigualdades

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x\right|\leqslant\lambda, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right|\leqslant\lambda, \tag{16}$$

es decir, que el error $|\Delta z|$ se distribuya a medias entre dos sumandos en el segundo miembro de la desigualdad (15).

De las desigualdades (16) se ve que los cálculos serán más económicos, si a título de $|\Delta x|$, $|\Delta y|$ (en realidad, 10^{-k}, 10^{-l}) tomamos unos números máximos posibles que satisfagan estas desigualdades.

EJEMPLO 1. La función $z = \ln(xy)$ tiene, para $x > 0$, $y > 0$, las derivadas parciales continuas

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{y}.$$

Por eso la igualdad aproximada

$$z = \ln(xy) \approx \ln[(x+\Delta x)(y+\Delta y)$$

tiene un error absoluto, el cual para Δx, Δy pequeños satisface, siempre que se menosprecian las magnitudes considerablemente inferiores a dichos incrementos, la desigualdad

$$|\Delta z|\leqslant\left|\frac{\Delta x}{x}\right|+\left|\frac{\Delta y}{y}\right| \quad (x,\ y>0).$$

Si se requiere que el error garantizado sea inferior a 2λ, se deben elegir Δx, Δy de un modo tal que sea

$$\left|\frac{\Delta x}{x}\right|\leqslant\lambda, \quad \left|\frac{\Delta y}{y}\right|\leqslant\lambda.$$

Vemos, pues, que los números Δx, Δy no deben ser forzosamente iguales. Si, por ejemplo, x es considerablemente inferior a y, hemos de tomar, correspondientemente, Δx menor que Δy. De lo contrario nuestros cálculos no serían económicos. Si, por ejemplo, fuera

$$\left|\frac{\Delta x}{x}\right|=\lambda_1, \quad \left|\frac{\Delta y}{y}\right|=\lambda_2,$$

donde $\lambda_1 < 0{,}1$, $\lambda_2 < 0{,}001$, tendríamos

$$\left|\frac{\Delta x}{x}\right|+\left|\frac{\Delta y}{y}\right|<0{,}1001,$$

y, por ende, tendríamos que gastar un trabajo de sobra, debido a la pequeñez superflua de Δy, para calcular el segundo sumando $\left|\frac{\Delta y}{y}\right|$. Entre tanto, los cálculos se simplificarán mucho, si tomamos $|\Delta x|$, $|\Delta y|$ máximos posibles que satisfagan las desigualdades

$$\left|\frac{\Delta x}{x}\right|<0{,}05, \quad \left|\frac{\Delta y}{y}\right|<0{,}05.$$

EJEMPLO 2. La función $z = xy$ tiene las derivadas parciales continuas

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x.$$

Por eso la igualdad aproximada

$$z = xy \approx (x + \Delta x)(y + \Delta y)$$

tiene el error absoluto $|\Delta z|$, el cual, siendo pequeños los incrementos Δx, Δy, satisface, si se menosprecian las magnitudes considerablemente inferiores a los incrementos citados, las relaciones

$$|\Delta z| \approx |dz| \leqslant |y\,\Delta x| + |x\,\Delta y|.$$

Correspondientemente, el error relativo satisface las relaciones

$$\left|\frac{\Delta z}{z}\right| \approx \left|\frac{dz}{z}\right| \leqslant \left|\frac{\Delta x}{x}\right| + \left|\frac{\Delta y}{y}\right|.$$

Vemos que para Δx y Δy pequeños podemos considerar que *el error relativo del producto no sobrepasa la suma de errores relativos de los factores.*

EJEMPLO 3. La función $z = \frac{x}{y}$ tiene, para $y \neq 0$, las derivadas parciales continuas $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$. Por eso la igualdad aproximada

$$z = \frac{x}{y} \approx \frac{x + \Delta x}{y + \Delta y}$$

tiene el error absoluto $|\Delta z|$, el cual, siendo pequeños los incrementos Δx, Δy, satisface, si se menosprecian las magnitudes considerablemente inferiores a Δx, Δy, las relaciones

$$|\Delta z| \approx |dz| \leqslant \left|\frac{\Delta x}{y}\right| + \left|\frac{x}{y^2}\Delta y\right|.$$

Respectivamente, el error relativo satisface las relaciones

$$\left|\frac{\Delta z}{z}\right| \approx \left|\frac{dz}{z}\right| \leqslant \left|\frac{\Delta x}{x}\right| + \left|\frac{\Delta y}{y}\right|.$$

De este modo, podemos considerar, para Δx y Δy pequeños, que *el error relativo del cociente no sobrepasa la suma de errores relativos del dividiendo y del divisor.*

Observación. La cuestión referente a la estimación precisa de las magnitudes menospreciadas en nuestros razonamientos se resuelve en la base de la fórmula de Taylor para las funciones de varias variables, de lo que se tratará en el § 8.10.

§ 8.7. Plano tangente. Significado geométrico de la diferencial

Sea dada una superficie S descrita por la función

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

que tiene derivadas parciales continuas en cierto dominio del plano x, y (podemos considerar que f es derivable en el dominio).

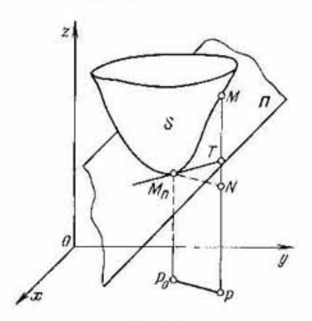


Fig. 98

Se denomina *plano tangente* a la superficie S en su punto $M_0 \times$ $\times (x_0, y_0, z_0)$, $z_0 = f(x_0, y_0)$, un plano cuya ecuación es

$$Z - z_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (X - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (Y - y_0), \tag{2}$$

donde X, Y, Z son las coordenadas corrientes y $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$, representan los valores de las derivadas parciales de f en el punto $P_0 = (x_0, y_0)$.

Designemos el plano (2) con Π. Este plano pasa por el punto M_0 de la superficie S y posee una propiedad que lo hace diferente de otros planos que pasan por el punto M_0.

Sea $P = (x, y)$ un punto del plano x, y, próximo al P_0 (x_0, y_0) (fig. 98). Una recta que pasa por P y es paralela al eje z atraviesa Π en el punto T, y en el punto M atraviesa la superficie S. La z-coordenada de M es

$$z = f(x, y)$$

y la de T es

$$Z=f(x_0,\ y_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0(x-x_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0(y-y_0).$$

La distancia entre los puntos M y T es igual a

$$|MT|=|f(x,\ y)-f(x_0,\ y_0)-\\ -\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0(x-x_0)-\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0(y-y_0). \quad (3)$$

La distancia entre los puntos P y P_0 es

$$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}.$$

Por cuanto la función f tiene, por hipótesis, derivadas parciales continuas en el punto $(x_0,\ y_0)$, será diferenciable en este punto. Por eso el segundo miembro de (3) tiende a cero más rápidamente que ρ, es decir,

$$|MT|=o(\rho) \quad (\rho\to 0).$$

Hemos demostrado que el *plano tangente* Π *a la superficie* S *en el punto de ésta* $M_0=(x_0,\ y_0,\ z_0)$ *pasa por el punto citado* y *tiene una propiedad: la distancia en la dirección del eje* z *desde un punto arbitrario* $(x,\ y,\ f(x,\ y))$ *de la superficie* S *hasta* Π *es* $o(\rho)$ $(\rho\to 0)$, *donde* ρ *es la distancia entre los puntos* $(x,\ y)$ y $(x_0,\ y_0)$ *del plano* $x,\ y$.

Esta propiedad es característica para un plano tangente, pues, si cierto plano Π' del tipo

$$z-z_0=a(x-x_0)+b(y-y_0) \quad (z_0=f(x_0,\ y_0))$$

posee dicha propiedad, esto es, si para él se verifica la igualdad

$$f(x,\ y)-f(x_0,\ y_0)-a(x-x_0)-b(y-y_0)=o(\rho)$$
$$(\rho\to 0)$$

o bien, que es lo mismo, la igualdad

$$f(x,\ y)-f(x_0-y_0)=a(x-x_0)+b(y-y_0)+o(\rho) \quad (\rho\to 0),$$

entonces, según se conoce, f es diferenciable en $(x_0,\ y_0)$ y

$$a=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0,\quad b=\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0,$$

es decir, el plano Π' es tangente a S $(\Pi'=\Pi)$.

De este modo, para que una superficie S tenga un plano tangente en su punto $(x_0,\ y_0,\ f(x_0,\ y_0))$, es necesario y suficiente que la función f sea derivable en el punto $z_0=(x_0,\ y_0)$.

El segundo miembro de la ecuación (2) es una diferencial de f en el punto $(x_0,\ y_0)$

$$df=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0(x-x_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0(y-y_0),$$

correspondiente a los incrementos $(x - x_0,\ y - y_0)$. Mientras tanto el miembro primero de (2) es el incremento correspondiente de la z-coordenada del plano tangente Π.

Así pues, desde el punto de vista geométrico la diferencial de una función f en el punto (x_0, y_0) para los incrementos $(x - x_0,\ y - y_0)$ es el incremento de la z-coordenada de un punto del plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0) para los mismos incrementos.

Observación. Si la función $z = f(x, y)$ no es diferenciable en el punto (x_0, y_0), aunque tiene en el mismo derivadas parciales, entonces no hay sentido en llamar el plano (2) tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto citado, pues, para este plano la diferencia $f(x, y) - Z$ no tiende a cero, para $\rho \to 0$, con mayor rapidez que ρ. Por ejemplo, si la función $z = f(x, y)$ es igual a cero en los ejes x e y, y a uno, en los demás puntos del plano x, y, entonces $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$ y la ecuación (2) es $Z = 0$, y $f(x, y) - Z = f(x, y) - 0 = 1$ para todos los puntos (x, y) que no se hallan en los ejes x e y. De este modo, la diferencia citada ni siquiera tiende a cero cuando $\rho \to 0$.

§ 8.8. Derivada de una función compuesta. Derivada direccional. Gradiente

8.8.1. Derivada de una función compuesta

Nos limitamos aquí al análisis de las funciones de tres variables definidas en un conjunto abierto $G \subset R_3$. Los razonamientos que se dan a conocer se extienden al caso n-dimensional por analogía.

TEOREMA 1. *Supongamos que una función*

$$u = f(x, y, z) \tag{1}$$

es diferenciable en el punto $(x, y, z) \in G$, y las funciones

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t), \tag{2}$$

dependientes del parámetro escalar t, tienen una derivada en t. Entonces, la derivada respecto de t de una función compuesta (derivada respecto de f a lo largo de la curva (2)) $u = F(t) = f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$ se calcula según la fórmula

$$F'(t) = f'_x(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\, \varphi'(t) + \\ + f'_y(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\, \psi'(t) + \\ + f'_z(\varphi(t), \psi(t), \chi(t))\, \chi'(t),$$

o bien, en la forma más breve,

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}, \tag{3}$$

En efecto, por ser f diferenciable en (x, y, z), tenemos

$$\Delta u=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)-f(x, y, z)=$$
$$=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z+o(\rho)\quad (\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}\to 0). \tag{4}$$

Al valor de t, al cual corresponde (con ayuda de las igualdades 2) el punto (x, y, z), le atribuyamos un incremento Δt. Este dará origen a los incrementos Δx, Δy, Δz de las funciones (2). Si sustituimos en (4) precisamente dichos incrementos, obtendremos el incremento $F(t+\Delta t)-F(t)=\Delta u$ de la función F en el punto t. Al dividir (4) por Δt y pasar al límite, obtendremos

$$F'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta t}=$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta t}+\frac{o(\rho)}{\Delta t}\right)=$$
$$=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt},$$

es decir, (3), puesto que las funciones (2) tienen derivadas, y

$$\frac{o(\rho)}{\Delta t}=\varepsilon(\rho)\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2}\to$$
$$\to 0\cdot\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}=0\quad(\Delta t\to 0)$$

($\Delta t\to 0$ lleva consigo $\rho\to 0$).

Observación. Si las funciones x, y, z dependen de varias variables, por ejemplo, de dos:

$$x=\varphi(t, \tau),\quad y=\psi(t, \tau),\quad z=\chi(t, \tau),$$

entonces, fijando primero τ, y a continuación t, obtendremos, en virtud de (3):

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t},\quad \frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \tau}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \tau}.$$

8.8.2. Derivada direccional (según una dirección)

TEOREMA 2. *Si una función f es diferenciable en el punto (x, y, z), para ella tiene sentido una derivada según la dirección de cualquier vector unidad $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ expresada por la fórmula*

$$\frac{\partial f}{\partial n}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma \tag{5}$$

(α, β, γ *son los ángulos formados por el vector* $\boldsymbol{n}$ *con los ejes de* x, y, z).

Demostración. De conformidad con la definición de derivada direccional (véase el § 8.5) y debido al teorema antecedente,

$$\frac{\partial f}{\partial n}=\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}}\frac{f(x+t\cos\alpha,\ y+t\cos\beta,\ z+t\cos\gamma)-f(x,\ y,\ z)}{t}=$$

$$=\left[\frac{d}{dt}f(x+t\cos\alpha,\ y+t\cos\beta,\ z+t\cos\gamma)\right]_{t=0}=$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma,$$

donde las derivadas parciales se han tomado en el punto $(x,\ y,\ z)$.

Si $x=\varphi(s)$, $y=\psi(s)$, $z=\chi(s)$ son las ecuaciones de una curva suave Γ, donde el parámetro s representa la longitud de un arco, entonces las magnitudes

$$\frac{dx}{ds}=\varphi'(s),\quad \frac{dy}{ds}=\psi'(s),\quad \frac{dz}{ds}=\chi'(s)$$

son cosenos directores del vector de la tangente a Γ. Por ello, una magnitud

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\varphi'(s)+\frac{\partial f}{\partial y}\psi'(s)+\frac{\partial f}{\partial z}\chi'(s)=\frac{d}{ds}f(\varphi(s),\ \psi(s),\ \chi(s)),$$

donde f es una función derivable, representa la derivada según la dirección del vector tangente citado. Suele decirse, además, que $\frac{\partial f}{\partial s}$ es una derivada de f a lo largo de Γ.

8.8.3. Gradiente de una función

Introduzcamos un vector

$$\operatorname{grad} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial z}\right),\tag{6}$$

llamado *gradiente* de la función f en el punto $(x,\ y,\ z)$.

La fórmula (5) dice que *la derivada de f en el punto $(x,\ y,\ z)$ según la dirección del vector unidad $\boldsymbol{n}$ es igual a la proyección del gradiente en dicho punto sobre la dirección de $\boldsymbol{n}$*:

$$\frac{\partial f}{\partial n}=(\operatorname{grad} f,\ \boldsymbol{n})=\operatorname{grad}_n f.\tag{7}$$

Tiene lugar una desigualdad obvia

$$\frac{\partial f}{\partial n}\leqslant|\operatorname{grad} f|\tag{8}$$

para cualquier vector $\boldsymbol{n}$. Si $\operatorname{grad} f=\boldsymbol{o}$, que ocurre corrientemente sólo en los puntos excepcionales, entonces $\frac{\partial f}{\partial n}=0$ para cualquier vector $\boldsymbol{n}$. Si, en cambio, $\operatorname{grad} f\neq\boldsymbol{o}$ (una de las derivadas parciales de f no es igual a cero), entonces (8) es una desigualdad estricta para todos los vectores unidad $\boldsymbol{n}$, a excepción del único vector $\boldsymbol{n}_0=$

$=(\cos\alpha_0, \ \cos\beta_0, \ \cos\gamma_0)$ orientado en la dirección de grad f $\left(\frac{\partial f}{\partial n_0} = \right.$ $= \left. |\operatorname{grad} f| > 0\right)$. De este modo,

$$\cos\alpha_0 = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\beta_0 = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}, \tag{9}$$

$$\cos\gamma_0 = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}.$$

De lo dicho se desprende que el *gradiente de la función f en el punto (x, y, z) puede definirse como un vector que posee las siguientes dos propiedades*:

1) *su longitud es igual al valor máximo de la derivada direccional* $\frac{\partial f}{\partial n}$ en (x, y, z) (para una función diferenciable en (x, y, z) el máximo citado existe y es un número no negativo);

2) *si su longitud no es igual a cero, está orientado en la misma dirección que el vector* $\mathbf{n}$, *a lo largo del cual la derivada* $\frac{\partial f}{\partial n}$ *es máxima.*

8.8.4. Funciones homogéneas

Introduzcamos en el examen las así llamadas funciones homogéneas. Sea dado un vector $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, donde λ_i son todos números arbitrarios. Una función $f(x_1, \ldots, x_n)$, definida en R_n, se denomina *λ-homogénea de orden m*, si para todo $t > 0$ y cualesquiera $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in R_n$ se verifica la igualdad

$$f(t^{\lambda_1} x_1, \ldots, t^{\lambda_n} x_n) = t^{m\frac{|\lambda|}{n}} f(x_1, \ldots, x_n), \tag{10}$$

donde $|\lambda| = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$.

Si $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 1$, la función f se denomina simplemente *homogénea de orden m*. En lo que sigue se considerará que las derivadas parciales f'_{x_i} $(i = 1, \ldots, n)$ son continuas en R_n.

TEOREMA 3. *Para que la función f sea λ-homogénea de orden m, es necesario y suficiente que se verifique la igualdad*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i f'_{x_i}(x_1, \ldots, x_n) = m \frac{|\lambda|}{n} f(x_1, \ldots, x_n). \tag{11}$$

Si la función f es homogénea de orden m, obtenemos la conocida fórmula de Euler.

Demostración. 1) Supongamos que f es una función λ-homogénea de orden m, entonces, diferenciando la identidad (10) (como una función compuesta) respecto de t, obtendremos

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(t^{\lambda_1}x_1, \ldots, t^{\lambda_n}x_n)}{\partial x_i} \lambda_i x_i t^{\lambda_i - 1} = m \frac{|\lambda|}{n} t^{m\frac{|\lambda|}{n} - 1} f(x_1, \ldots, x_n).$$

Si en esta igualdad suponemos $t = 1$, obtenemos la igualdad (11).

2) Supongamos ahora que tiene lugar la igualdad (11). Fijemos un punto $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y formemos una función

$$\varphi(t) = t^{-m\frac{|\lambda|}{n}} f(t^{\lambda_1}x_1, \ldots, t^{\lambda_n}x_n) \tag{12}$$

Diferenciando esta función respecto de t, encontramos:

$$\varphi'(t) = \frac{t^{m\frac{|\lambda|}{n}} \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(t^{\lambda_1}x_1, \ldots, t^{\lambda_n}x_n) \lambda_i x_i t^{\lambda_i - 1} - m \frac{|\lambda|}{n} t^{m\frac{|\lambda|}{n} - 1} f(t^{\lambda_1}x_1, \ldots, t^{\lambda_n}x_n)}{t^{2m\frac{|\lambda|}{n}}} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i t^{\lambda_i} x_i f'_{x_i}(t^{\lambda_1}x_1, \ldots, t^{\lambda_n}x_n) - m \frac{|\lambda|}{n} f(t^{\lambda_1}x_1, \ldots, t^{\lambda_n}x_n)}{t^{m\frac{|\lambda|}{n}+1}} = 0.$$

La última igualdad tiene lugar en virtud de (11) para el punto $(t^{\lambda_1}x_1, \ldots, t^{\lambda_n}x_n)$.

De este modo, $\varphi'(t) = 0$ y $\varphi(t) = C$. La constante C se halla de la condición de que para $t = 1$ se tiene $\varphi(1) = f(x_1, \ldots, x_n)$. Por tanto, de (12) tenemos

$$f(t^{\lambda_1}x_1, \ldots, t^{\lambda_n}x_n) = t^{m\frac{|\lambda|}{n}} f(x_1, \ldots, x_n),$$

es decir, la función f es λ-homogénea de orden m.

§ 8.9. Diferencial de una función. Diferencial de orden superior

Analicemos una función

$$W = f(x) = f(x_1, \ldots, x_n), \tag{1}$$

dada en cierto conjunto abierto $G \subset R_n$. Hay una infinidad de métodos, mediante los cuales dicha función puede ser escrita en la forma

$$W = \varphi(u) = \varphi(u_1, \ldots, u_m), \tag{2}$$

donde

$$u_j = \psi_j(x) \quad (j = 1, \ldots, m;\ x \in G). \tag{3}$$

En adelante se empleará la siguiente terminología: la variable W es una función de la variable vectorial independiente x; la misma variable W es una función de la *variable vectorial dependiente* u. La última depende de la variable independiente x: a todo vector x de G le corresponde un vector $u = (\psi_1(x), \ldots, \psi_m(x))$.

De este modo, la variable vectorial x es aquí de carácter excepcional: en los razonamientos que van abajo intervendrá *sólo como una variable independiente.*

Supongamos que la función f tiene derivadas parciales continuas de primer orden en el punto $x \in G$. Entonces, como ya lo sabemos por el § 8.6, es diferenciable, es decir, su incremento en el punto citado puede anotarse en la forma

$$\Delta W = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_j} \Delta x_j + o(\rho) \quad (\rho \to 0), \tag{4}$$

$$\rho = |\Delta x| = \Big(\sum_{j=1}^{n} \Delta x_j^2\Big)^{1/2},$$

y su diferencial es igual a

$$dW = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \Delta x_j. \tag{5}$$

Para las variables independientes $x_1, \ldots, x_n$ se supone

$$\Delta x_j = dx_j \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{6}$$

y se llaman estas magnitudes no sólo incrementos de las variables independientes, sino también sus *diferenciales*. Llamémoslos *diferenciales independientes* para subrayar que no dependen de $x = (x_1, \ldots, x_n)$. La «independencia» de las magnitudes dx_j se pondrá de

manifiesto formalmente en que al diferenciar (respecto de $x_1, \ldots, x_n$) se considerarán como unas *constantes* ($d\,(dx_j) = 0$).

En virtud de (6), la diferencial de W puede escribirse en la forma

$$dW = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_j}\, dx_j. \tag{7}$$

Está claro que dW es una magnitud que depende, en el caso general, de $x_1, \ldots, x_n$ y de $dx_1, \ldots, dx_n$. Para cada dos funciones u y v que tienen las derivadas parciales continuas en el punto x son válidas las propiedades

$$d\,(u \pm v) = du \pm dv, \tag{8}$$

$$d\,(uv) = u\,dv + v\,du, \tag{9}$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2} \quad (v \neq 0), \tag{10}$$

con la particularidad de que las derivadas parciales de las funciones entre paréntesis son continuas en el punto x.

Demostremos, por ejemplo, la tercera de estas igualdades

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{u}{v}\right) dx_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{v\frac{\partial u}{\partial x_j} - u\frac{\partial v}{\partial x_j}}{v^2}\, dx_j =$$

$$= \frac{1}{v^2}\left(v\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}\, dx_j - u\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx_j\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

El tercer miembro de la cadena nos muestra que $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{u}{v}\right)$ es continua.

La diferencial de la función W se denomina, además, *diferencial de primer orden*, puesto que hemos de examinar además, las diferenciales de ordenes superiores.

Supongamos ahora que la función W tiene segundas derivadas parciales continuas. Por definición, *la segunda diferencial* de ella, correspondiente a los incrementos independientes (diferenciales) $dx_1, \ldots, dx_n$, se determina mediante la igualdad

$$d^2W = d\,(dW), \tag{11}$$

donde se considera que ambas operaciones d en el segundo miembro de (11) se realizan para los incrementos independientes $dx_1, \ldots, dx_n$, los cuales han de considerarse como constantes (no dependientes

de $x_1, \ldots, x_n$). De este modo,

$$d^2W = d\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial W}{\partial x_j}dx_j = \sum_{j=1}^{n} d\left(\frac{\partial W}{\partial x_j}dx_j\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left(d\frac{\partial W}{\partial x_j}\right)dx_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\,\partial x_j}dx_i\,dx_j. \quad (12)$$

Ya que $\frac{\partial^2 W}{\partial x_i\,\partial x_j} = \frac{\partial^2 W}{\partial x_j\,\partial x_i}$, entonces la segunda diferencial representa en sí una forma cuadrática con relación a las diferenciales independientes $dx_1, \ldots, dx_n$. Se llama *forma cuadrática de las variables* $\xi_1, \ldots, \xi_n$ una función del tipo

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\xi_i\xi_k, \text{ donde } a_{ik} = a_{ki}.$$

En general, una diferencial de orden l de W para las diferenciales independientes $dx_1, \ldots, dx_n$ se determina por inducción con ayuda de una relación recurrente

$$d^lW = d\,(d^{l-1}W), \quad (l = 2, 3, \ldots), \quad (13)$$

donde d^l, d, d^{l-1} se toman para las diferenciales independientes indicadas $dx_1, \ldots, dx_n$, las cuales, en adición, se consideran en los cálculos como constantes (no dependientes de $x_1, \ldots, x_n$).

Al razonar igual que en (12), obtenemos con facilidad que

$$d^3W = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^3 W}{\partial x_k\,\partial x_i\,\partial x_j}dx_k\,dx_i\,dx_j.$$

Bajo el supuesto admitido de que la función f tiene derivadas parciales continuas podemos simplificar la notación de las diferenciales.

Por ejemplo, para una función de dos variables $u = f(x, y)$ tenemos

$$d^2u = f''_{x^2}\,dx^2 + 2f''_{xy}\,dx\,dy + f''_{y^2}\,dy^2,$$

$$d^3u = d\,(d^2u) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\,\partial y}dx^2\,dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y^2}dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3.$$

Aplicando el método de inducción matemática, obtendremos con facilidad que

$$d^nu = \frac{\partial^n f}{\partial x^n}dx^n + n\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\,\partial y}dx^{n-1}\,dy + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\,\partial y^k}dx^{n-k}\,dy^k + \ldots + \frac{\partial^n f}{\partial y^n}dy^n.$$

Lo mismo puede anotarse en la forma simbólica:

$$d^n u = d^n f = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right\}^n f,$$

donde, primero, elevamos a potencia n la expresión en el segundo miembro, y a continuación añadimos f al símbolo ∂^n.

En el caso multidimensional tiene lugar una fórmula simbólica análoga

$$d^m f = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} dx_i \right\}^m f. \tag{14}$$

Hemos definido el concepto de diferencial de una función W en términos de las variables independientes $x_1, \ldots, x_n$ (o la variable vectorial independiente x). Pero supongamos ahora, de conformidad con lo explicado al principio de este párrafo, que W se considera como una función de la variable real *dependiente* $u = (u_1, \ldots, u_m)$. Surge una cuestión de cómo las diferenciales de ordenes primero y superiores se expresan en términos de esta variable u. Procedamos con el estudio de este problema para el caso de una diferencial de primer orden.

Supondremos que las funciones $\varphi(u)$ y $\psi_j(x)$ $(j = 1, \ldots, m)$, de las cuales se trataba al principio del párrafo, tienen derivadas parciales continuas. Entonces

$$dW = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial W}{\partial x_j} dx_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial W}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dx_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial W}{\partial u_i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial W}{\partial u_i} du_i, \tag{15}$$

y hemos llegado, al igual que en el caso de una sola variable, a que la primera diferencial de W se expresa en términos de las variables dependientes del mismo modo que en términos de las variables independientes. En esto precisamente se revela *la invariación de la forma de una diferencial primera.*

Con el objeto de investigar el problema planteado para el caso de la segunda diferencial supondremos que las funciones φ y ψ_j tienen derivadas parciales continuas de segundo orden.

Al diferenciar ambos miembros de (15), tomando en consideración las propiedades (8) y (9), obtendremos (las explicaciones vienen

más abajo)

$$d^2W = d\,(dW) = \sum_{i=1}^{m} d\left(\frac{\partial W}{\partial u_i}\,du_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 W}{\partial u_j\,\partial u_i}\,du_j\,du_i + \frac{\partial W}{\partial u_i}\,d^2u_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2 W}{\partial u_j\,\partial u_i}\,du_j\,du_i + \sum_{i=1}^{m}\frac{\partial W}{\partial u_i}\,d^2u_i. \quad (16)$$

En la segunda igualdad de esta cadena hemos aprovechado la propiedad (8) y en la tercera, la propiedad (9), y, además, el hecho de que la forma de la primera diferencial se conserva para las variables dependientes u_j también. Vemos que la segunda diferencial de W, expresada en términos de las variables dependientes u_j, se descompone esencialmente en dos sumandos. El primer sumando representa una forma cuadrática análoga a la forma (12), donde d^2W se ha expresado mediante las variables independientes. Mientras tanto, el segundo sumando representa en sí un suplemento que no puede ser despreciado: si u_j ($j = 1, \ldots, m$) no es una función lineal de x_j, este suplemento no es igual a cero ni mucho menos.

Observemos que de nuestros razonamientos se deduce que si la expresión (16) se toma para $dx_1, \ldots, dx_n$, que intervienen en la expresión (12), entonces ambas expresiones citadas son idénticamente iguales, cualesquiera que sean X, para las cuales existen dichas derivadas parciales continuas de segundo orden, y cualesquiera que sean dx_j independientes.

El cálculo de las diferenciales d^3W, d^4W, . . . por intermedio de las variables dependientes u_j se realiza sucesivamente de un modo semejante. Nos vemos obligados a soportar el hecho de que las expresiones para ellas se hacen cada vez más engorrosas.

§ 8.10. Fórmula de Taylor

Nos limitamos al análisis de una función de dos variables. Supongamos que $u = f(x, y)$ tiene en un entorno del punto $P_0 = (x_0, y_0)$ derivadas continuas de cualquier orden hasta l-ésimo inclusive. Elijamos en dicho entorno un punto $P_1 = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$. Unamos los puntos P_0 y P_1 con un segmento de una curva, la ecuación del cual puede escribirse en la forma paramétrica del modo siguiente:

$$x = x_0 + t\Delta x, \quad y = y_0 + t\Delta y, \quad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Entonces, $u = f(x, y)$ será a lo largo de este segmento la función de una sola variable t:

$$f(x, y) = f[x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y] = F(t). \quad (1)$$

Es fácil ver que la diferencia

$$\Delta f(P_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = F(1) - F(0). \quad (2)$$

La fórmula de Maclaurin para la función $F(t)$ en el entorno del punto $t_0 = 0$ tiene por expresión

$$F(t) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} t + \ldots + \frac{F^{(l-1)}(0)}{(l-1)!} t^{l-1} + \frac{F^{(l)}(\theta)}{l!} t^l \quad (0 < \theta < t).$$

Haciendo $t = 1$, obtenemos

$$F(1) - F(0) = \sum_{k=1}^{l-1} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} + \frac{F^{(l)}(\theta)}{l!}, \text{ donde } 0 < \theta < 1. \quad (3)$$

Calculemos las derivadas de la función $F(t)$ a través de $f(x, y)$. De la relación (1) tenemos

$$F'(t) = \frac{\partial f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)}{\partial y} \Delta y,$$

de donde para $t = 0$ obtenemos

$$F'(0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y = df(P_0).$$

Análogamente

$$F''(t) = f''_{x^2}(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) \Delta x^2 + \\ + 2f''_{xy}(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) \Delta x \Delta y + \\ + f''_{y^2}(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y) \Delta y^2, \quad F''(0) = d^2 f(P_0).$$

Continuando este proceso, obtendremos

$$F'''(0) = d^3 f(P_0), \ldots, F^{(l-1)}(0) = d^{l-1} f(P_0).$$

Debido a esto, de (2) y (3) tenemos

$$\Delta f(P_0) = \frac{df(P_0)}{1!} + \ldots + \frac{d^{l-1} f(P_0)}{(l-1)!} + \frac{1}{l!} d^l f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y). \quad (4)$$

La fórmula (4) lleva el nombre *de Taylor* para la función $u = f(x, y)$. A primera vista es la misma que para la función de una sola variable, pero en la forma desarrollada es mucho más compleja.

Para el caso de una función f de n variables ($n > 2$) la fórmula de Taylor se anota en la misma forma (4).

Cuando $l = 1$, la fórmula de Taylor para la función f de n variables tiene por expresión

$$f(x) - f(x^0) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)_{x^0 + \theta(x - x^0)} (x_j - x_j^0) \quad (0 < \theta < 1),$$

donde el símbolo $(\quad)_a$ significa que la función entre paréntesis se calcula en el punto $x = a$. Esta fórmula es una generalización del teorema de Lagrange del valor medio para el caso multidimensional.

Cuando $l = 2$ y $n = 2$, la fórmula (4) en la forma desarrollada se escribirá así:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + \theta(x - x_0), y_0 + \right.$$
$$+ \theta(y - y_0))(x - x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta(x - x_0), y_0 +$$
$$+ \theta(y - y_0))(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0 + \theta(x - x_0), y_0 +$$
$$\left. + \theta(y - y_0))(y - y_0)^2 \right].$$

Para $l = 2$ y n arbitrario la fórmula (4) tiene por expresión:

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{x^0} (x_i - x_i^0) +$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{x^0 + \theta(x - x^0)} (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0),$$

donde $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

§ 8.11. Conjunto cerrado

Un conjunto $A \subset R_n = R$ se denomina *acotado*, si existe un número $M > 0$ tal que

$$|x| \leqslant M, \qquad \forall x \in A,$$

o, en otras palabras, si existe en R una bola cuyo centro se halla en el punto nulo y en dicha bola está contenido A.

El conjunto A se llama *cerrado*, si del hecho de que una sucesión de puntos x^k $(k = 1, 2, \ldots)$, pertenecientes a A, converge hacia el punto $x^0 \in R$ $(x^k \to x^0,\ x^k \in A)$ se deduce que x^0 pertenece a A $(x^0 \in A)$.

En la afirmación citada no se afirma que A contiene en sí una sucesión convergente. Se dice sólo que si en A existe una sucesión convergente, el punto, al cual converge la sucesión, pertenece a A.

Esto muestra que se debe considerar que un conjunto vacío es cerrado. Todo el espacio R_n es, obviamente, cerrado, pero no acotado.

Estudiemos, a título de ejemplo, un elipsoide en el espacio tridimensional

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,\ b,\ c>0), \tag{1}$$

es decir, un conjunto de puntos $(x,\ y,\ z)$ que satisfacen la ecuación (1). Designemos este conjunto mediante B. Es un conjunto acotado, puesto que para cualquiera de sus puntos $(x,\ y,\ z)$ se verifica la desigualdad

$$x^2+y^2+z^2\leqslant m\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)=m\cdot 1=m,$$

donde $m\geqslant a^2,\ b^2,\ c^2$. El conjunto es también cerrado, puesto que si definimos una sucesión arbitraria de puntos $(x_k,\ y_k,\ z_k)\in B$, convergente hacia el punto $(x_0,\ y_0,\ z_0)$, éste último también pertenece a B. En efecto, de la igualdad

$$\frac{x_k^2}{a^2}+\frac{y_k^2}{b^2}+\frac{z_k^2}{c^2}=1 \quad (k=1,\ 2,\ \ldots)$$

proviene, al pasar el límite para $k\to\infty$, una igualdad

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1,$$

la que muestra que $(x_0,\ y_0,\ z_0)\in B$.

Veamos ahora un conjunto más extenso A, compuesto por los puntos $(x,\ y,\ z)$, cuyas coordenadas satisfacen la desigualdad

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1. \tag{2}$$

El conjunto A es también, obviamente, acotado. Es, además, cerrado, pues, si

$$(x_k,\ y_k,\ z_k)\in A \quad (k=1,\ 2,\ \ldots),$$

es decir, si

$$\frac{x_k^2}{a^2}+\frac{y_k^2}{b^2}+\frac{z_k^2}{c^2}\leqslant 1,$$

y $(x_k,\ y_k,\ z_k)\to(x_0,\ y_0,\ z_0)$, entonces, evidentemente,

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{x_k^2}{a^2}+\frac{y_k^2}{b^2}+\frac{z_k^2}{c^2}\right)=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}\leqslant 1,$$

es decir, $(x_0,\ y_0,\ z_0)\in A$.

Con este motivo resulta interesante examinar, en adición, el tercer ejemplo del conjunto de puntos, A', cuyas coordenadas satisfacen una desigualdad estricta

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}<1. \tag{3}$$

El conjunto A' es abierto (véase el § 8.2), no es cerrado. Tomemos, por ejemplo una sucesión de puntos $(\alpha_k, 0, 0)$, donde α_k tiende al número a, creciendo estrictamente. Entonces, $(\alpha_k, 0, 0) \in A'$ $(k = 1, 2, \ldots)$ y $(\alpha_k, 0, 0) \to (a, 0, 0)$. Sin embargo, el punto límite $(a, 0, 0)$ no pertenece a A'.

Los ejemplos examinados se generalizan con facilidad. Supongamos que en todo el espacio R_n viene prefijada una función continua $F(x) = F(x_1, \ldots, x_n)$. Podemos afirmar que el conjunto B de todos los puntos $x = (x_1, \ldots, x_n)$, para los cuales se verifica la igualdad

$$F(x) = F(x_1, \ldots, x_n) = C, \tag{4}$$

donde C es un número arbitrario, es cerrado.

En efecto, puede suceder que no existan, en general, los puntos x que satisfagan la igualdad (4), es decir, que B sea un conjunto vacío, pero, como lo sabemos, un conjunto vacío es cerrado. Supongamos ahora que B es un conjunto no vacío y que cierta sucesión de puntos $\{x^k\}$, pertenecientes a B, converge hacia el punto $x^0 \in R_n$ (incluso si B consta de un único punto x^0, ya podemos construir una sucesión convergente de puntos pertenecientes a B, a saber, $\{x^0, x^0, \ldots\}$). Entonces $F(x^k) = C$ $(k = 1, 2, \ldots)$, y por ser F continua en el punto x^0, tenemos

$$\lim_{k\to\infty} F(x^k) = F(x^0) = C.$$

En tal caso $x^0 \in B$, es decir, el conjunto B es cerrado.

Análogamente, un conjunto de todos los puntos x que satisfacen la desigualdad $F(x) \leqslant C$, donde C es un número arbitrario y F es una función continua en R_n, es cerrado, puesto que de las relaciones

$$F(x^k) \leqslant C \quad (k = 1, 2, \ldots), \quad x^k \to x^0$$

se deduce, como consecuencia de que F es continua en R_n: $F(x^0) \leqslant C$.

En virtud de lo expuesto, un elipsoide n-dimensional

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{a_k^2} = 1 \quad (a_k > 0) \tag{5}$$

es un conjunto cerrado en R_n.

El elipsoide de volumen n-dimensional

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{a_k^2} \leqslant 1 \tag{6}$$

es también un conjunto cerrado en R_n.
Sin embargo, un conjunto

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{a_k^2} < 1, \tag{7}$$

el cual es natural llamar elipsoide de volumen abierto, no es cerrado. Podemos cerciorarse de esto razonando igual que en el caso de la fórmula (3). Este conjunto es abierto (véase el § 8.2).

Sea A un conjunto arbitrario perteneciente a R_n y sea x^0 un punto arbitrario de R_n ($A \subset R_n$, $x^0 \in R_n$). Pueden haber sólo tres casos recíprocamente excluyentes:

1. Existe una bola (esfera) V_{x^0} (abierta) con centro en el punto x^0, y dicha bola pertenece enteramente a A ($V_{x^0} \subset A$). En tal caso x^0 es, por definición, *un punto interior del conjunto* A (véase el § 8.2).

2. Existe una bola V_{x^0} con centro en x^0, todos los puntos de la cual no pertenecen a A ($V_x{}^0 \subset R_n \setminus A$). En este caso x^0 es, por definición, *un punto exterior del conjunto* A.

3. En cualquier bola V_{x^0} con centro en x^0 hay puntos que pertenecen y no pertenecen a A. En este caso x^0 es, por definición, *un punto límite del conjunto* A.

El conjunto A' de todos los puntos interiores del conjunto A lleva el nombre de *núcleo abierto de* A. Esto es un conjunto abierto (véase el § 8.2). Si A' no es vacío, entonces todo punto de A' puede ser cubierto con una bola con centro en dicho punto, perteneciente enteramente a A. Si A' es un conjunto vacío, se considera formalmente abierto.

Un conjunto $\Gamma \equiv \partial A$ de todos los puntos límites de A se denomina *frontera del conjunto* A. Es un conjunto cerrado, porque si $x^k \to x^0$ y $x^k \in \Gamma$ ($k = 1, 2, \ldots$), cualquier bola abierta V_{x^0} con centro en x^0 contiene cierto punto x^k. El último puede ser cubierto con una bola V_{x^k} con centro en x^k, perteneciente enteramente a V_{x^0} ($V_{x^k} \subset V_{x^0}$). Pero en V_{x^k} hay puntos que pertenecen y no pertenecen a A, entonces, en V_{x^0} también hay puntos que pertenecen y no pertenecen a A. Por consiguiente, $x^0 \in \Gamma$.

Un conjunto A'' de todos los puntos exteriores del conjunto A es, evidentemente, abierto.

Los puntos límites de A pueden pertenecer y no pertenecer al conjunto A.

En la fig. 99 el conjunto $A \subset R_2$ se compone de los puntos (x_1, x_2):

$$x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1, \quad x_1 \leqslant 0; \quad x_1^2 + x_2^2 < 1, \quad x_1 > 0; \quad x_1 = x_2 = 1.$$

Está claro que A' es el interior de un círculo de radio unidad y centro en el origen de coordenadas; Γ está constituido por los puntos de la circunferencia $x_1^2 + x_2^2 = 1$ y el punto $(1, 1)$; A'' incluye todos los puntos que se hallan fuera de la circunferencia de radio unidad, a excepción del punto $(1, 1)$. Aquí la mitad derecha de la circunferencia no pertenece a A, pero es una parte de la frontera Γ. Observemos que el conjunto dado A no es ni abierto ni cerrado.

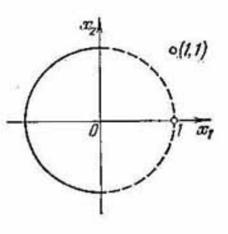


Fig. 99

Así pues, si está dado un conjunto arbitrario $A \subset R_n$, con relación a dicho conjunto el espacio R_n se puede representar como la suma de los conjuntos disjuntos dos a dos definidos más arriba:

$$R_n = A' + \Gamma + A''.$$

Si a título de conjunto A se examina un elipsoide de volumen abierto n-dimensional (6), entonces A' es el elipsoide de volumen abierto (7), y Γ es el elipsoide (5).

Si A es un conjunto abierto, entonces $R_n \setminus A$ es un conjunto cerrado, y viceversa. En efecto, sea A un conjunto abierto y sea $x^k \to x^0$, $x^k \in R_n \setminus A$. Si el punto x^0 perteneciera a A, entonces, en virtud de que A es un conjunto abierto, se encontraría una bola V_{x^0} (con centro en x^0) perteneciente enteramente a A. Pero, esto es imposible, puesto que en V_{x^0} se tienen los puntos x^k que pertenecen a $R_n \setminus A$. De este modo, $x^0 \in R_n \setminus A$ y $R_n \setminus A$ es cerrado.

Supongamos ahora que A es cerrado y el punto $x^0 \in R_n \setminus A$. Si el punto x^0 fuera un punto límite de A, habrían los puntos de A en cualquier bola V_{x^0} con centro en x^0. En este caso podríamos construir una sucesión de puntos $x^k \in A$ que converja hacia x^0. Pero en este caso, por ser A cerrado, el punto x^0 pertenecería a A, lo que contradice la suposición de que $x^0 \in R_n \setminus A$. Hemos demostrado que un punto arbitrario $x^0 \in R_n \setminus A$ es un punto interior de $R_n \setminus A$, es decir, que $R_n \setminus A$ es un conjunto abierto.

El conjunto $A + \Gamma$ se denomina *clausura de A* y se denota así:

$$\overline{A} = A + \Gamma.$$

Es evidente que

$$A' + \Gamma = A + \Gamma$$

puesto que, por un lado, $A' \subset A$, y, por ende, $A' + \Gamma \subset A + \Gamma$, y por otro lado, si $x \in A + \Gamma$, entonces o bien $x \in \Gamma$, y en este caso $x \in A' + \Gamma$, o bien $x \in A$ y $x \bar{\in} \Gamma$, mas, en este caso, $x \in A' \subset A' + \Gamma$.

Luego, $\overline{A} = A + \Gamma$ es un conjunto cerrado, porque el exterior de $A + \Gamma = A' + \Gamma$ es un conjunto abierto.

De este modo, para obtener $\overline{A}$, es necesario agregar a A todos los puntos límites suyos que no pertenecen al conjunto A.

Si A es cerrado, tenemos

$$A = A + \Gamma = \overline{A},$$

es decir, todos los puntos límites de A pertenecen a A. Es que $R_n \setminus A$ es abierto y todo punto $x^0 \in R_n \setminus A$ puede ser cubierto con una bola V_{x^0} que no contiene ningún punto perteneciente a A. Viceversa, si

$$A = A + \Gamma = \overline{A},$$

A será cerrado, porque si $x^k \to x^0$, $x^k \in A$, y si suponemos que $x^0 \overline{\in} A$, llegaremos a una contradicción, puesto que, en tal caso $x^0 \in \Gamma \subset A + \Gamma = A$.

De este modo, *para que el conjunto A sea cerrado, es necesario y suficiente que con este conjunto coincida su clausura* ($A = A$).

En particular, $\overline{A}$ es siempre cerrado, por lo cual $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Por fin, ha de ser notado que un conjunto vacío y todo el espacio R_n son a la vez conjuntos abiertos y cerrados. Se puede demostrar que en los casos restantes si el conjunto A es abierto, no será cerrado, y si es cerrado, no será abierto.

§ 8.12. Función continua en un conjunto acotado cerrado

Sea A, por ahora, un conjunto arbitrario del espacio $R = R_n$ y supongamos que en A viene definida una función $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$. Por definición, la función f *es continua en el punto $x^0 \in A$, si se verifica la igualdad*

$$\lim_{\substack{x^k \to x^0 \\ x^k \in A}} f(x^k) = f(x^0), \qquad (1)$$

cualquiera que sea la sucesión de puntos $x^k \in A$ convergente hacia x^k.

La diferencia entre la definición citada de continuidad de una función en el punto x^0 y la definición habitual propuesta en el § 8.4 consiste en lo siguiente: en la definición habitual se suponía que la función f estaba definida en cierto entorno del punto x^0 y se requería que el límite (1) existiera y fuera igual a $f(x^0)$ para *cualquier sucesión de puntos x^k convergente a x^0*.

Ahora no se requiere que la función f esté definida en todo el entorno de x^0. Sólo se exige que f esté definida en el punto $x^0 \in A$ y que el límite (1) tenga lugar para cualquier sucesión de puntos $x^k \in A$ convergente hacia el punto x^0.

La definición aducida puede enunciarse también en el lenguaje de ε, δ: la función f es continua en el punto $x^0 \in A$, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(x^0)| < \varepsilon, \quad \forall x \in A, \quad |x - x^0| < \delta.$$

Ahora supondremos que A es un conjunto cerrado acotado del espacio R y la función $f(x)$, definida en este conjunto es continua en él. Asumidas dichas suposiciones, podemos demostrar las siguientes propiedades notables:

1) La función f está acotada en el conjunto A.

2) La función f admite en el conjunto A un máximo y un mínimo, es decir, existen en A tales puntos x^0 e y^0 que

$$f(x^0) = \max_{x \in A} f(x), \quad f(y^0) = \min_{x \in A} f(x).$$

3) La función f es uniformemente continua en el conjunto A o sea, para todo $\varepsilon > 0$ existe tal $\delta > 0$ que

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

para cualesquiera $x', x'' \in A$ que satisfacen las desigualdades $|x' - x''| < \delta$.

Vemos pues que las propiedades 1), 2), 3) generalizan las propiedades ya conocidas de la función continua $f(x)$ de una sola variable x definida en el segmento $[a, b]$. Subrayemos que el segmento $[a, b]$ es un conjunto unidimensional acotado cerrado. Es que si una sucesión de puntos (números) x_k, pertenecientes al segmento $[a, b]$, converge hacia cierto punto (número) x_0, entonces este punto pertenece a $[a, b]$ $(x_0 \in [a, b])$.

La demostración de las propiedades 1), 2), 3) es sumamente análoga a la que se ha realizado para el segmento $[a, b]$ en los §§ 3.5 y 3.7. Se basa por entero en el siguiente lema que generaliza el correspondiente teorema unidimensional de Bolzano-Weierstrass aducido en el § 2.9.

LEMA *En toda sucesión acotada de puntos* $x^k = (x_1^k, \ldots, x_n^k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *se puede elegir una subsucesión* $\{x^{k_l}\}$ $(l = 1, 2, \ldots)$ *convergente hacia un punto* x^0:

$$|x^{k_l} - x^0| \to 0 \quad (l \to \infty).$$

Demostración. Por cuanto la sucesión $\{x^k\}$ está acotada, existe un número M tal que

$$M \geqslant |x^k| \geqslant |x_j^k| \quad (j = 1, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots).$$

Esto prueba que las coordenadas de los puntos x^k están también acotadas. La primera coordenada forma una sucesión acotada $\{x_1^k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, y, en virtud del teorema unidimensional de Bolzano-Weierstrass, se encontrarán una subsucesión k_{l_1} de números naturales y cierto número x_1^0 tales que $x_1^{k_{l_1}} \to x_1^0 (l_1 \to \infty)$. La segunda coordenada x_2^k se considerará sólo para los k_{l_1} naturales hallados. La subsucesión $\{x_2^{k_{l_1}}\}$ está acotada, razón por la cual se pueden elegir en ella una subsucesión $\{x_2^{k_{l_2}}\}$ y un número x_2^0 tales que $x_2^{k_{l_2}} \to x_2^0$.

Por cuanto $\{k_{l_2}\}$ es una subsucesión de $\{k_{l_1}\}$, tenemos a la vez $x_1^{k_{l_2}} \to x_1^0$, $x_2^{k_{l_2}} \to x_2^0$. Continuando este proceso, obtendremos en su n-ésima etapa una subsucesión de números naturales $k_{l_n} = k_l$ y un sistema de números $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ tales que simultáneamente

$$x_1^{k_l} \to x_1^0, \quad x_2^{k_l} \to x_2^0, \; \ldots, \; x_n^{k_l} \to x_n^0 \quad (l \to \infty).$$

Al poner $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, obtendremos la afirmación del lema.

Demostración de la propiedad 1). Admitamos que f no está acotada en el conjunto cerrado acotado A. Entonces, para cada número natural m existe un punto $x^m \in A$ tal que

$$|f(x^m)| > m \quad (m = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Como el conjunto A está acotado, la sucesión de puntos $\{x^m\}$ está también acotada y, en virtud del lema, se puede elegir en ella una subsucesión $\{x^{m_k}\}$ que converge hacia cierto punto x^0. Por hipótesis, el conjunto A está acotado, por lo cual el punto $x^0 \in A$. Pero en el punto x^0 la función f es continua y por eso

$$\lim_{\substack{k \to \infty \\ x^{m_k} \in A}} f(x^{m_k}) = f(x^0). \tag{3}$$

La propiedad (3) contradice la (2). Por eso f puede ser solamente acotada en el conjunto cerrado acotado A.

Demostración de la propiedad 2). De acuerdo con la propiedad 1), una función, continua en el conjunto cerrado acotado A, está acotada, por consiguiente, está acotada superiormente por el número K: $f(x) \leqslant K$ $(x \in A)$.

Pero, en este caso existe una cota superior exacta de f en A:

$$\operatorname*{Sup}_{x \in A} f(x) = M. \tag{4}$$

El número M posee una propiedad siguiente: para todo m natural existe en el conjunto A un punto $x^m = (x_1^m, \ldots, x_n^m)$ tal que

$$M - \frac{1}{m} < f(x^m) \leqslant M \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

La sucesión $\{x^m\}$ pertenece al conjunto cerrado acotado A y por eso está acotada

$$|x^m| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i^m|^2} \leqslant K_1, \quad m = 1, 2, \ldots$$

a consecuencia de lo cual podemos elegir en ella una subsucesión $\{x^{m_k}\}$ convergente hacia cierto punto $x^0 \in A$. La última conclusión se desprende de lo que el conjunto A es cerrado.

Pero la función f es continua en el conjunto A, por consiguiente, lo es en el punto x^0 y por esta razón

$$\lim_{\substack{k\to\infty \\ x^{m_k}\in A}} f(x^{m_k}) = f(x^0).$$

Por otra parte

$$M - \frac{1}{m_k} < f(x^{m_k}) \leqslant M \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Pasando al límite en esta desigualdad para $k \to \infty$, obtenemos

$$M \leqslant f(x^0) \leqslant M,$$

es decir,

$$f(x^0) = M.$$

De este modo, la cota superior (4) se alcanza en el punto $x^0 \in A$, es decir, la función f admite en el punto $x^0 \in A$ un máximo en el conjunto A.

Así pues, hemos demostrado que existe un punto $x^0 \in A$, para el cual

$$\max_{x\in A} f(x) = f(x^0).$$

La otra parte de la propiedad 2), referente al mínimo, se demuestra análogamente.

Demostración de la propiedad 3). Admitamos que la propiedad no es justa. Entonces existe tal $\varepsilon > 0$ que para cualquier $\delta > 0$ se encontrará un par de puntos $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in A$, que satisfacen la desigualdad

$$|x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} < \delta,$$

para los cuales se cumple

$$|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon.$$

Fijemos ahora una sucesión de números positivos $\delta_m \to 0$ para $m \to \infty$. Para cada δ_m se encontrarán unos puntos $x^m = (x_1^m, \ldots, x_n^m)$, $y^m = (y_1^m, \ldots, y_n^m) \in A$ tales que $|x^m - y^m| < \delta_m$, pero

$$|f(x^m) - f(y^m)| \geqslant \varepsilon. \tag{5}$$

Puesto que los puntos de la sucesión $\{x^m\}$ pertenecen al conjunto acotado A, dicha sucesión está acotada y, de acuerdo con el lema, en ella puede elegirse una subsucesión $\{x^{m_k}\}$ convergente hacia cierto punto $x^0 \in A$ (por ser el conjunto A cerrado).

Como $|x^{m_k} - y^{m_k}| \to 0$, para $k \to \infty$, la subsucesión $\{y^{m_k}\}$ también converge al punto x^0, puesto que

$$|y^{m_k} - x^0| = |y^{m_k} - x^{m_k} + x^{m_k} - x^0| \leqslant$$
$$\leqslant |y^{m_k} - x^{m_k}| + |x^{m_k} - x^0|.$$

Por hipótesis, la función f es continua en A, y, por ende, será continua en el punto x^0.

Por eso

$$\lim_{\substack{k\to\infty \\ x^{m_k}\in A}} f(x^{m_k}) = \lim_{\substack{k\to\infty \\ y^{m_k}\in A}} f(y^{m_k}) = f(x^0).$$

Ahora, pasando al límite en (5) para $k \to \infty$, obtenemos

$$\varepsilon \leqslant \lim_{\substack{k\to\infty \\ x^{m_k},\, y^{m_k}\in A}} |f(x^{m_k}) - f(y^{m_k})| = |f(x^0) - f(x^0)| = 0$$

y hemos llegado a una contradicción: $\varepsilon \leqslant 0$.

§ 8.13. Extremos

Supongamos que en un dominio (un conjunto conexo abierto) G viene dada una función $u = f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y sea $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ un punto de G. Suele decirse que la función $u = f(x)$ dispone de *máximo* (*mínimo*) *local* en el punto x^0, si un entorno $\exists$ de este punto es tal que $\forall x$, perteneciente a dicho entorno, tiene lugar la desigualdad

$$f(x) \leqslant f(x^0) \quad (f(x) \geqslant f(x^0)). \tag{1}$$

El punto x^0 se denominará *punto de máximo* (*mínimo*) *local* y el valor correspondiente de la función $f(x^0)$, *valor máximo* (*mínimo*) *de la función*. El máximo y el mínimo locales tienen una denominación general «*extremo local*». De la definición de extremo se deduce que en un entorno suficientemente pequeño del punto x^0 el incremento de la función $\Delta u = f(x) - f(x^0)$ no cambia de signo:

$\Delta u \geqslant 0$ en el caso de un mínimo local (mín);

$\Delta u \leqslant 0$ en el caso de un máximo local (máx).

TEOREMA 1 (CONDICION NECESARIA DE UN EXTREMO). *Supongamos que una función $u = f(x)$ dispone de extremo local en el punto x^0. Entonces, si existen las derivadas parciales de primer orden $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ en el punto x^0, todas ellas se anulan en este punto:*

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{2}$$

Demostración. Demostremos que $\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}=0$. Fijemos las variables $x_2=x_2^0, \ldots, x_n=x_n^0$. Obtendremos, pues, la función $u=f(x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ de una sola variable x_1, con la particularidad de que dicha función tiene un extremo local en el punto x_1^0. Por tanto, en virtud de la condición necesaria de un extremo para la función de una sola variable, concluimos que la derivada de esta función respecto de la variable x_1 debe ser igual a cero en el punto x_1^0. Pero dicha derivada es una derivada parcial de la función $f(x)$ respecto de la variable x_1 en el punto x^0, es decir,

$$\frac{\partial f(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_1}=\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}=0.$$

Los otros casos se examinan de una manera análoga.

COROLARIO. *Si una función $u=f(x)$ dispone de extremo en el punto x^0 y es derivable en el punto x^0*, entonces $df(x^0)=0$, o grad $f(x^0)=0$.

El corolario dado se desprende de la definición de diferencial y de la de gradiente.

Observación. La condición (2) no es suficiente para que en punto x^0 haya un extremo de la función f.

Por ejemplo, una función $u=x^2y$ tiene derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x}=2xy, \frac{\partial u}{\partial y}=x^2$, las cuales se reducen a cero en el punto (0, 0). No obstante, el punto (0, 0) no es un punto de extremo, puesto que en cualquier entorno de este punto $\Delta u=x^2y-0=x^2y$ adquiere tanto valores positivos, como negativos.

En lo sucesivo llamaremos *estacionarios* aquellos *puntos* en los cuales existen derivadas parciales continuas de f que satisfacen el sistema (2).

Pasemos ahora a la obtención de las condiciones suficientes de un extremo. Supongamos que la función $u=f(x)$ tiene derivadas continuas de orden hasta el segundo inclusive respecto de todas las variables y sea x^0 un punto estacionario, es decir, $df(x^0)=0$. Entonces, desarrollando la función $u=f(x)$ según la fórmula de Taylor en el entorno del punto x^0, obtendremos

$$\Delta f(x^0)=df(x^0)+\frac{1}{2!}d^2f(x^0+\theta\,\Delta x)=$$

$$=\frac{1}{2}d^2f(x^0+\theta\,\Delta x)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f''_{x_ix_j}(x^0+\theta\,\Delta x)\,\Delta x_i\,\Delta x_j=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(f''_{x_ix_j}(x^0)+\varepsilon_{ij}(\Delta x_i\,\Delta x_j=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f''_{x_ix_j}(x^0)\,\Delta x_i\,\Delta x_j+\frac{\rho^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij}\frac{\Delta x_i}{\rho}\cdot\frac{\Delta x_j}{\rho}=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f''_{x_ix_j}(x^0)\,\Delta x_i\,\Delta x_j+\frac{\rho^2}{2}\alpha(\Delta x),$$

donde $0<\theta<1$, $\Delta x=(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$, $\rho=|\Delta x|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i^2}$, $\alpha(\Delta x)\to 0$ cuando $\rho\to 0$.

Ya que las segundas derivadas son continuas, las magnitudes ε_{ij}, que dependen de Δx, tienden a cero cuando $\rho=|\Delta x|\to 0$, pero, en este caso, también $\max_{i,j}|\varepsilon_{ij}|=\varepsilon\to 0$ para $\rho\to 0$. Por esto, teniendo presente que $\frac{|\Delta x_i|}{\rho}\leqslant 1$, obtenemos $|\alpha(\Delta x)|=$

$$=\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij}\frac{\Delta x_i}{\rho}\frac{\Delta x_j}{\rho}\right|\leqslant\varepsilon\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}1\cdot 1=n^2\varepsilon\to 0\quad(\rho\to 0).$$

Así pues, se ha demostrado que

$$\Delta f(x^0)=f(x^0+\xi)-f(x^0)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j+\frac{\rho^2}{2}\alpha(\xi), \tag{3}$$

donde

$$a_{ij}=a_{ji}=f''_{x_ix_j}(x^0),\ \xi_i=\Delta x_i,\ \xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$$

y

$$\alpha(\xi)\to 0 \text{ para } \rho=|\xi|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2}\to 0.$$

La expresión

$$A(\xi)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j\quad(a_{ij}=a_{ji}) \tag{4}$$

es una forma cuadrática con relación a $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Según el signo de esta forma podemos enterarnos, con ayuda de la fórmula (3), del signo de $\Delta f(x^0)$ para $|\Delta x|$ suficientemente pequeños.

Queda válida la siguiente afirmación:

1) Si la forma $A(\xi)$ es estrictamente definida positiva, es decir, si $A(\xi)>0$ para todo $\xi\neq 0$, la función f tiene en el punto x^0 un mínimo local.

2) Si la forma $A(\xi)$ es estrictamente definida negativa, es decir, si $A(\xi)<0$ para todo $\xi\neq 0$, la función f tiene en el punto x^0 un máximo local.

3) Si $A(\xi) \geqslant 0$ para todo ξ o $A(\xi) \leqslant 0$ para todo ξ y se tiene $\xi \neq 0$, para el cual $A(\xi) = 0$, entonces la cuestión de extremo local de la función f en el punto x^0 queda suspendida.

4) Si la forma $A(\xi)$ no está definida respecto de su signo, es decir, si existen los vectores ξ' y ξ'', para los cuales $A(\xi') > 0$, $A(\xi'') < 0$, entonces la función f no tiene extremo local en el punto x^0.

Demostración de la afirmación 1). Escribamos la igualdad (3) del modo siguiente:

$$\Delta f(x^0) = \frac{\rho^2}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\xi_i}{\rho}\frac{\xi_j}{\rho} + \alpha(\xi)\right] =$$

$$= \frac{\rho^2}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\eta_i\eta_j + \alpha(\xi)\right] = \frac{\rho^2}{2}[A(\eta) + \alpha(\xi)], \qquad (5)$$

donde se han introducido las variables nuevas

$$\eta_i = \xi_i/\rho \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Es fácil ver que

$$|\eta| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \eta_i^2} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2}}{\rho} = 1.$$

De este modo, el punto η se halla, para ξ cualquiera, sobre la superficie de una bola unidad n-dimensional. La función $A(\eta)$ es continua en la superficie mencionada la que representa un conjunto cerrado acotado, y es, por hipótesis, positiva en esta superficie. Pero en tal caso $A(\eta)$ alcanza su mínimo m en cierto punto de esta superficie, el cual es superior a cero ($m > 0$) (véase el § 8.12, propiedad 2)). Por cuanto $\alpha(\xi) \to 0$ para $\rho = |\xi| \to 0$, entonces, siendo $\delta > 0$ suficientemente pequeño, tenemos

$$|\alpha(\xi)| < m, \quad \forall \xi : |\xi| < \delta.$$

Por consiguiente,

$$\Delta f(x^0) = f(x^0 + \xi) - f(x^0) = \frac{\rho^2}{2}[A(\eta) + \alpha(\xi)] \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\rho^2}{2}[m + \alpha(\xi)] \geqslant 0, \quad \forall \xi : |\xi| < \delta$$

y la función f dispone de máximo local en el punto x^0.

La afirmación 2) se demuestra análogamente.

Demostración de la afirmación 3). En el caso dado la forma $A(\xi)$ se reduce a cero para cierto $\xi' \neq 0$, mas, entonces, en virtud de la propiedad de homogeneidad de la forma ($A(\alpha\xi) = \alpha^2 A(\xi)$) para $\xi = \alpha\xi'$, donde α es un número, ésta también debe ser igual a cero,

lo que es indicio de que para todos los puntos indicados ξ nuestra forma es igual a cero y, por consiguiente, $f(x^0+\xi)-f(x^0)=$ $=\frac{1}{2}\rho^2\alpha(\xi)$. Como el signo de $\alpha(\xi)$ es desconocido, no podemos decir si tiene f extremo en x^0 o no lo tiene.

Demostración de la afirmación 4). Aquí también resulta conveniente recurrir a la igualdad (5). En este caso existe, por hipótesis, un punto ξ', para el cual la forma es positiva, y existe un punto ξ'', para el cual la forma es negativa, pero entonces para los puntos $\eta'=$ $=\xi'/\rho$, $\eta''=\xi''/\rho$, que les corresponden, se verificarán las desigualdades $A(\eta')>0$, $A(\eta'')<0$, y, siendo ρ pequeños, resultará que $A(\eta')+\alpha(\xi')>0$, $A(\eta'')+\alpha(\xi'')<0$, es decir, en cualquier entorno pequeño de x^0 hay unos puntos x' y x'', para los cuales $f(x')>f(x^0)$ y $f(x'')<f(x^0)$, lo que es testimonio de que a ciencia cierta no hay extremo.

Se conocen las condiciones (de *Sylvester*)[1]), que se expresan en el lenguaje de los coeficientes a_{ij}, para las cuales la forma cuadrática (4) satisface las condiciones mencionadas 1)—4). Demos a conocer aquí sólo los criterios (que provienen del teorema de Sylvester) en el caso de una función $u=f(x_1, x_2)$ de dos variables.

Si $a_{11}=f''_{x_1^2}(x^0)>0$, y

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=f''_{x_1^2}(x^0)\,f''_{x_2^2}(x^0)-[f''_{x_1x_2}(x^0)]^2>0$$

(en este caso la forma (4) es estrictamente definida positiva), entonces la función $u=f(x_1, x_2)$ dispone de mínimo local en el punto $x^0=(x_1^0, x_2^0)$.

Si

$$f''_{x_1^2}(x^0)<0,\ f''_{x_1^2}(x^0)\,f''_{x_2^2}(x^0)-[f''_{x_1x_2}(x^0)]^2>0$$

(en este caso la forma (4) es estrictamente definida negativa), entonces la función $u=f(x_1, x_2)$ tiene máximo local en el punto x^0.

Si $a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$, entonces $d^2f(x^0)$, siendo una forma cuadrática, no está definida según su signo al variar Δx_i, por lo cual en este caso $\Delta f(x^0)$, tampoco conserva el signo, cualquiera que sea el punto x^0, y, por lo tanto, en x^0 no hay extremo.

Si $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$, la cuestión sobre un extremo queda suspendida.

EJEMPLO 1. Para la función $u=x^3-3x+y^2$ los puntos $(\pm1,0)$ son estacionarios. Veamos si tienen o no algún extremo.

---

[1]) Véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Elementos del álgebra lineal y de la Geometría analítica», § 21.

Tenemos

$$u''_{x^2} = 6x, \quad u''_{x^2}(\pm 1, 0) = \pm 6, \quad u''_{xy} = 0, \; u''_{y^2} = 2.$$

De este modo, para el punto (1, 0): $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 6 \cdot 2 - 0 = 12 > 0$, $a_{11} = 6 > 0$. Por eso en el punto (1, 0) nuestra función dispone de máximo local. Para el punto (—1, 0): $a_{11} = -6 < 0$, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -12 < 0$, por lo cual la función no tiene extremo en el punto (—1, 0).

EJEMPLO 2. Para la función $u = x^4 + y^2$ el punto (0, 0) es estacionario y es fácil ver que en este punto la función tiene un mínimo local. Entre tanto, $u''_{x^2} = 12x^2$, $u''_{xy} = 0$, $u''_{y^2} = 2$, es decir, $a_{11} = 0$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = 2$, y $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$.

EJEMPLO 3. Para la función $u = x^3 + y^2$ tenemos en el punto estacionario (0, 0) $a_{11} = 0$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = 2$, es decir, aquí también $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, sin embargo en este caso la función $u = x^3 + y^2$ no tiene extremo en el punto (0, 0), puesto que en la recta $y = 0$ el incremento $\Delta u = x^3$ cambia de signo al pasar por el punto $x = 0$.

§ 8.14. Búsqueda de los valores máximos y mínimos de una función

Sea dada una función continuamente diferenciable $u = f(x)$ en un conjunto $G \subset R_n$ el cual representa la clausura de un dominio acotado, es decir, de un dominio al cual se ha agregado la frontera ∂G. Entonces, f alcanza tanto un máximo como un mínimo en ciertos puntos $x \in G$ (véase el § 8.12, propiedad 3)). Estos puntos pueden ser interiores y límites. Si un punto x es interior, la función $f(x)$ tiene en él un extremo local. Por eso, para encontrar el valor máximo (mínimo) de la función, es necesario hallar todos los puntos estacionarios, calcular los valores de la función en dichos puntos y luego compararlos con los valores de la función en la frontera ∂G. El máximo de estos valores será precisamente el *valor máximo* de la función en G.

Si $G \subset R_2$ y ∂G es una curva continua plana $x = \varphi(t)$, $y = \varphi(t)$, entonces a lo largo de la frontera nuestra función es función de una sola variable t: $f[\varphi(t), \psi(t)]$. Ya sabemos cómo se halla el valor máximo de las funciones de este género.

EJEMPLO. Hállese el valor máximo de la función $z = 1 - x + x^2 + 2y$ en un dominio cerrado G, limitado por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ (fig. 100).

Resolución. $z'_x = -1 + 2x = 0$, $z'_y = 2 \neq 0$, es decir, no hay puntos estacionarios. Investiguemos la función z en ∂G.

1) Sea $x = 0$, entonces $z = 1 + 2y$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. En [0, 1] la función $z = 1 + 2y$ tampoco tiene puntos estacionaros y $z(0) = 1$, $z(1) = 3$.

2) Sea $y = 0$, entonces $z = 1 - x + x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Luego, $z'_x = -1 + 2x = 0$ para $x = 1/2$, es decir, $x = 1/2$ es un punto estacionario. Al calcular el valor de la función en este punto y en la frontera para $x = 0$ y $x = 1$, obtendremos: $z(1/2) = 3/4$, $z(0) = 1$, $z(1) = 1$.

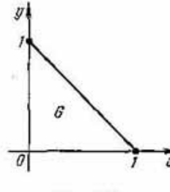


Fig. 100

3) Sea $x + y = 1$, entonces $z = 3 - 3x + x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. Por cuanto $z'_x = -3 + 2x = 0$ en el punto $x = 3/2 \bar{\in} [0, 1]$, concluimos que en nuestro segmento $[0, 1]$ no hay puntos estacionarios. Luego, $z(0) = 3$, $z(1) = 1$.

Comparando todos los valores máximos de la función en diferentes partes de la frontera, vemos que el valor máximo de la función $z(x, y)$ en G es igual a 3 y se alcanza este valor en el punto $x^0 = (0, 1)$.

§ 8.15. Teorema de existencia de una función implícita

Prefijemos una función arbitraria $f(x, y)$ de dos variables x e y. Igualémosla a cero:

$$f(x, y) = 0. \tag{1}$$

Un conjunto de todos los puntos (x, y), para los cuales se verifica la igualdad (1), denotemos con $\mathfrak{M}$. Sea $(x_0, y_0) \in \mathfrak{M}$, es decir, $f(x_0, y_0) = 0$.

El conjunto $\mathfrak{M}$ puede ser de naturaleza más diversa, si a la f no se imponen ningunas condiciones. Por ejemplo, en el caso de $f(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ el conjunto $\mathfrak{M}$ se compone de un único punto (x_0, y_0); si $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$, el conjunto $\mathfrak{M}$ es vacío; si $f(x, y) = (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 = (x + y - x_0 - y_0)(x - y - x_0 + y_0)$, el conjunto $\mathfrak{M}$ es un par de rectas que pasan por (x_0, y_0). Sin embargo, se encuentran a menudo los casos en que $\mathfrak{M}$ representa, por lo menos en un entorno suficientemente pequeño de (x_0, y_0), una curva que se describe por una función continua (uniforme)

$$y = \psi(x), \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

(de este modo, ψ es una función definida implícitamente por la ecuación (1), véase también el § 3.1).

Surge una cuestión, ¿cómo determinar, basándose en las propiedades de f, que tiene lugar precisamente este caso?

Más abajo se demuestran dos teoremas generales que responden a la pregunta planteada.

TEOREMA 1. *Sea dada una ecuación*

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

que satisface las siguientes propiedades.

La función f está definida en cierto entorno bidimensional Ω del punto (x_0, y_0) en el plano (x, y) y es continua en él junto con sus derivadas parciales de primer orden, y, además,

$$f'_y(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \neq 0 \tag{2}$$

y $f(x_0, y_0) = 0$. Sea, luego, $\mathfrak{M}$ un conjunto de todos los puntos (x, y) que satisfacen la ecuación (1) *(en particular, el punto $(x_0, y_0) \in \mathfrak{M}$).*

Entonces, cualquiera que sea $b_0 > 0$, existe un rectángulo

$$\Delta = \{|x - x_0| < a, \ |y - y_0| < b\}, \quad b < b_0, \tag{3}$$

perteneciente a Ω, *tal que el conjunto $\mathfrak{M}\Delta$ se describe por una función continuamente diferenciable (función implícita)*

$$y = \psi(x), \quad x \in \Delta^0, \tag{4}$$

$$\Delta^0 = \{|x - x_0| < a\}. \tag{5}$$

En otras palabras, el rectángulo Δ posee la propiedad de que en su proyección Δ^0 sobre el eje x se puede definir la función continuamente diferenciable (4) que es la solución de la ecuación (1), es decir, la cual satisface la ecuación (1)

$$f(x, \psi(x)) \equiv 0, \quad x \in \Delta^0. \tag{6}$$

Su gráfica pertenece plenamente a Δ. Dicha función es única en el sentido de que cualquier punto $(x, y) \in \mathfrak{M}\,\Delta$ tiene coordenadas asociadas con la ecuación (4). En particular, $y_0 = \psi(x_0)$, puesto que $(x_0, y_0) \in \mathfrak{M}\Delta$ (fig. 101).

Demostración del teorema 1. Sea, para concretar, $f'_y(x_0, y_0) > 0$. Dado que f'_y es continua en Ω, existe un entorno del punto (x_0, y_0) (que se denotará nuevamente mediante Ω) tal que en él $f'_y(x, y) > 0$. Introduzcamos un rectángulo cerrado

$$\overline{\Delta} = \{|x - x_0| \leqslant a, \quad |y - y_0| \leqslant b\} \subset \Omega \quad (b < b_0).$$

Entonces, $f'_y(x, y) > 0$ en $\overline{\Delta}$ y

$$\min_{(x, y) \in \overline{\Delta}} f'_y(x, y) = m > 0. \tag{7}$$

La función $f(x, y)$, que se considera en el segmento $[y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b, \ x = x_0]$, es continua como función de y, crece estrictamente y se anula en el punto $y = y_0$ (de conformidad con la hipótesis del teorema, $f(x_0, y_0) = 0$). Quiere decir,

$$f(x_0, y_0 - b) < 0, \quad f(x_0, y_0 + b) > 0.$$

Por ser f continua, existe un número a, suficientemente pequeño, $0 < a < \bar{a}$, tal que

$$f(x, y_0 - b) < 0, \quad f(x, y_0 + b) > 0, \quad \forall x \in \Delta^0 = \{|x - x_0| < a\}.$$

Designemos mediante $\Delta = \{|x - x_0| < a, \ |y - y_0| < b\}$ el rectángulo abierto. Es evidente que $\Delta \subset \bar{\Delta} \subset \Omega$, y Δ^0 es la proyección de Δ sobre el eje x.

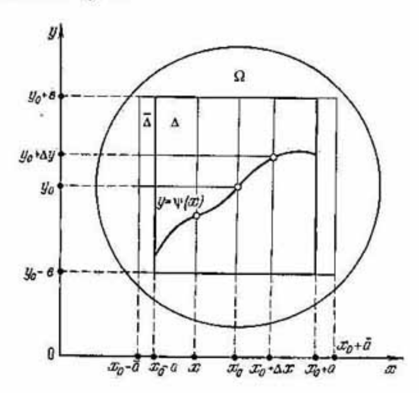


Fig. 101

Examinemos ahora, para $x \in \Delta^0$ arbitrariamente fijado, una función f como función de y en el segmento $[y_0 - b, y_0 + b]$. Es continua, crece estrictamente ($f'_y > 0$!) y tiene signos opuestos en los extremos del segmento. De acuerdo con el teorema del valor intermedio, existe en este caso un número y, y, además, único, perteneciente al intervalo $(y_0 - b, y_0 + b)$; designamos este número mediante $y = \psi(x)$, para el cual $f(x, \psi(x)) \doteq 0$.

Con esto queda demostrada la existencia de la función $\psi(x)$ que está definida en Δ^0 y satisface la ecuación (6).

Demostremos que la función $\psi(x)$ es continua en Δ^0. Supongamos que $x, x + \Delta x \in \Delta^0$, $y = \psi(x)$, $\Delta y = \psi(x + \Delta x) - \psi(x)$. Entonces, en virtud de la fórmula de Taylor (pág. 312), tenemos

$$0 = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = f'_x(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y) \times$$
$$\times \Delta x + f'_y(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y)\Delta y, \text{ donde } 0 < \theta < 1.$$

De aquí

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -f'_x(x+\theta\Delta x,\ y+\theta\Delta y)/f'_y(x+\theta\Delta x,\ y+\theta\Delta y), \qquad (8)$$

donde el punto $(x+\theta\Delta x,\ y+\theta\Delta y) \in \Delta$.

En vista de la hipótesis del teorema, en el rectángulo cerrado $\overline{\Delta}$, y, por ende, también en el rectángulo $\Delta \subset \overline{\Delta}$, la función f'_x está acotada ($|f'_x| \leqslant M$), y, según (7), la función f'_y está acotada inferiormente por el número $m > 0$, razón por la cual de (8) obtenemos

$$\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right| \leqslant \left|\frac{M}{m}\right|,$$

es decir, $\Delta y \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$, y esto implica la continuidad de la función $y = \psi(x)$ en el punto x. Como el punto x es arbitrariamente elegido en Δ^0, la función $\psi(x)$ es continua en Δ^0.

Ahora, pasando al límite en (8) para $\Delta x \to 0$, obtenemos (según lo demostrado, Δy también $\to 0$)

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{f'_x(x,\ y)}{f'_y(x,\ y)} \quad (y=\psi(x)). \qquad (9)$$

Hemos demostrado la existencia de la derivada $\psi'(x)$ en el punto x y la igualdad

$$\psi'(x) = -\frac{f'_x(x,\ \psi(x))}{f'_y(x\psi(x))}. \qquad (10)$$

La continuidad de $\psi'(x)$ se ve directamente de (10), puesto que f'_x y f'_y son continuas en el rectángulo Δ, y la curva $y = \psi(x)$ no sale de sus márgenes y es continua, lo que se ha demostrado más arriba.

Enunciemos un teorema, análogo al teorema 1, para el caso en que una función implícita depende de n variables.

TEOREMA 1'. *Sea prefijada una ecuación*

$$f(x,\ y) = f(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ y) = 0 \qquad (1')$$

que satisface las siguientes condiciones.

La función f está definida en cierto entorno Ω del punto $(x^0,\ y^0) = (x_1^0,\ \ldots,\ x_n^0,\ y^0)$ del espacio R_{n+1} de puntos $(x,\ y) = (x_1,\ \ldots,\ x_n,\ y)$ *y es continua en él junto con sus derivadas parciales de primer orden, y, además*

$$f'_y(x^0,\ y^0) = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \neq 0, \quad f(x^0,\ y_0) = 0. \qquad (2')$$

Supongamos a continuación que $\mathfrak{M}$ es un conjunto de todos los puntos $(x,\ y)$ que satisfacen la ecuación (1') *(en particular,* $(x^0,\ y^0) \in \mathfrak{M}$).

Entonces, cualquiera que sea $b_0 > 0$, *existe en* Ω *un rectángulo*

$$\Delta = \{ | x_j - x_j^0 | < a, \quad j = 1, \ldots, n, \quad | y - y^0 | < b \}, \quad b < b_0, \tag{3'}$$

perteneciente a Ω, *tal que el conjunto* $\mathfrak{M}\Delta$ *se describe por una función continuamente diferenciable (es decir, por una función que tiene derivadas parciales continuas)*

$$y = \psi(x) = \psi(x_1, \ldots, x_n), \; x \in \Delta^0, \tag{4'}$$

$$\Delta^0 = \{ | x_j - x_j^0 | < a, \quad j = 1, \ldots, n \}. \tag{5'}$$

Las derivadas parciales de la función ψ se calculan según la fórmula

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_j} = -\frac{\partial f}{\partial x_j} \Big/ \frac{\partial f}{\partial y} \quad (j = 1,, \ldots, n). \tag{10'}$$

Si la función f (en el caso de los teoremas 1 y 1') tiene derivadas continuas de orden superior l, entonces la función implícita también tiene derivadas de orden l, las cuales pueden hallarse diferenciando l veces la fórmula (10) ó (10').

EJEMPLO. Supongamos conocido el hecho de que una función $f(x, y)$, considerada en el teorema 1, tiene derivadas parciales continuas de segundo orden. Partiremos de la igualdad (10). Diferenciándola respecto de x, obtendremos

$$\psi''(x) = -\frac{f'_y (f''_{x^2} + f''_{xy}\psi') - f'_x (f''_{xy} + f''_{y^2}\psi')}{(f'_y)^2}.$$

Se ha aprovechado aquí la fórmula de diferenciación de la función compuesta.

§ 8.16. Plano tangente y normal

Supongamos que la superficie S está dada en la forma implícita por una ecuación

$$F(x, y, z) = 0.$$

Convengamos en considerar que $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ y que en cierto entorno del punto (x_0, y_0, z_0) la función F tiene derivadas parciales continuas que no son iguales a cero simultáneamente. Entonces

$$\text{grad}_0 F = ((F'_x)_0, (F'_y)_0, (F'_z)_0, (F'_z)_0) \neq 0. \tag{2}$$

Escribimos $(\Phi)_0$ en lugar de $\Phi(x_0, y_0, z_0)$.

Supongamos, para concretar, que $(F'_z)_0 \neq 0$. En virtud del teorema de la función implícita, existe un entorno del punto (x_0, y_0, z_0), en el cual la superficie S se describe de una manera explícita por una función continuamente diferenciable $z = f(x, y)$. Ya sabemos que

la ecuación del plano tangente a S en el punto (x_0, y_0, z_0) tiene por expresión

$$z - z_0 = (f'_x)_0 (x - x_0) + (f'_y)_0 (y - y_0),$$

donde

$$(f'_x)_0 = -(F'_x)_0/(F'_z)_0,$$
$$(f'_y)_0 = -(F'_y)_0/(F'_z)_0.$$

Debido a ello la ecuación del plano tangente a S en el punto (x_0, y_0, z_0) se anotará así:

$$(F'_x)_0 (x - x_0) + (F'_y)_0 (y - y_0) + (F'_z)_0 (z - z_0) = 0, \quad (3)$$

y la ecuación de la normal a S en el punto (x_0, y_0, z_0):

$$\frac{x - x_0}{(F'_x)_0} = \frac{y - y_0}{(F'_y)_0} = \frac{z - z_0}{(F'_z)_0}. \quad (4)$$

Obtendremos las mismas ecuaciones (3), (4), si suponemos que $(F'_x)_0 \neq 0$, bien $(F'_y)_0 \neq 0$. En estos casos la superficie S en el en-

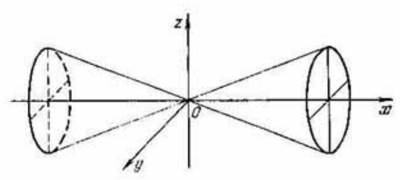


Fig. 102

torno del punto (x_0, y_0, z_0) se describe explícitamente por las ecuaciones respectivas

$$x = \varphi (y, z), \quad y = \psi (x, z).$$

Vemos que, cumplida la condición (12), cierto pedazo de la superficie S, perteneciente a un entorno suficientemente pequeño de (x_0, y_0, z_0) tiene en cualquiera de sus puntos un plano tangente que varía continuamente a medida que se desplaza continuamente el punto (x_0, y_0, z_0). Tal pedazo recibe el nombre de *pedazo suave de la superficie S*.

Otra cosa es, si $\text{grad}_0 F = 0$. En este caso no puede garantizarse que en el punto (x_0, y_0, z_0) existe un plano tangente a S. Este puede existir y puede no existir.

EJEMPLO. La ecuación

$$z^2 + y^2 - x^2 = 0 \quad (5)$$

define un cono circular cuyo vértice se encuentra en el origen de coordenadas y el eje del cono coincide con el eje x (fig. 102).

El primer miembro de la ecuación (5) tiene derivadas parciales

$$F'_x = -2x, \quad F'_y = 2y, \quad F'_z = 2z,$$

que no son nulas simultáneamente, siempre que el punto $(x, y, z) \neq \neq (0, 0, 0)$. En cualquiera de los puntos de esta índole, el que se denotará (x_0, y_0, z_0), el plano tangente se determina mediante la ecuación

$$-x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) + z_0(z - z_0) = 0.$$

El plano tangente a nuestra superficie cónica no existe en el origen de coordenadas. En este caso $\text{grad}_0 F = 0$.

Los puntos (x_0, y_0, z_0) que se hallan en la superficie S, en los cuales $\text{grad}_0 F = 0$, se denominan *puntos singulares de la superficie S*.

Examinemos una función continuamente diferenciable

$$u = f(x, y, z) \tag{6}$$

en cierto dominio Ω de puntos (x, y, z). Supongamos que en el punto $(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$ el valor de esta función es igual al número A:

$$A = f(x_0, y_0, z_0).$$

Si las derivadas parciales de f en el punto (x_0, y_0, z_0) no son nulas simultáneamente, la ecuación $A = f(x, y, z)$ define en el entorno de dicho punto una cierta superficie suave S, llamada *superficie de nivel de la función* (6).

El plano tangente a S en el punto (x_0, y_0, z_0) tiene la siguiente ecuación

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x)_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 (z - z_0) = 0.$$

La normal a S en el punto (x_0, y_0, z_0), es decir, una recta que pasa por este punto perpendicularmente con relación al plano tangente tiene, obviamente, la ecuación

$$\frac{X - x_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0} = \frac{Y - y_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0} = \frac{Z - z_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0}.$$

Vemos que el vector

$$\text{grad } f_0 = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0, \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0, \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0\right)$$

está orientado a lo largo de la normal a la superficie S.

La ecuación $z = f(x, y)$, donde la función f tiene derivadas parciales continuas, define cierta superficie suave S. Pongamos $A = = f(x_0, y_0)$. Si en el punto (x_0, y_0) las derivadas parciales $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$ no son nulas simultáneamente, la ecuación $A = f(x, y)$

definirá en el entorno de este punto cierta curva suave Γ (*línea de nivel* de la función $z = f(x, y)$).

La ecuación de la tangente a Γ en (x_0, y_0) será

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x-x_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y-y_0)=0.$$

El vector $\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0, \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0\right)$ está orientado a lo largo de la normal a Γ en el punto (x_0, y_0).

§ 8.17. Sistemas de funciones dadas en la forma implícita

Se ha examinado anteriormente la cuestión de existencia de una función implícita continua y diferenciable, definida por una ecuación.

Aquí se examinará una cuestión análoga para un conjunto de las funciones implícitas $y_1, \ldots, y_m$ definidas por un sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1, \ldots, x_n;\ y_1, \ldots, y_m)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n;\ y_1, \ldots, y_m)=0. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

De este modo, buscamos las funciones $y_1, \ldots, y_m$ de $x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$ como soluciones del sistema (1): $y_i = \psi_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Aclaremos las condiciones que aseguran la existencia de la solución del sistema (1) y la diferenciabilidad de las funciones y_i.

TEOREMA 1. *Sea prefijado un sistema de ecuaciones* (1) *que satisface las siguientes propiedades.*

Las funciones f_j están definidas en cierto entorno ($(n+m)$-dimensional) Ω del punto $(x^0, y^0) = (x_1^0, \ldots, x_n^0; y_1^0, \ldots, y_m^0)$ del espacio R_{n+m} de puntos $(x, y) = (x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)$ y son continuas en él junto con sus derivadas parciales de primer orden con un jacobiano (determinante de Jacobi[1])

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} = \left|\frac{\partial f_i}{\partial y_i}\right| = \frac{D(f_1, \ldots, f_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)} \neq 0.$$

Además, el punto (x^0, y^0) satisface el sistema (1).

Sea $\mathfrak{M}$ un conjunto de todos los puntos (x, y) que satisfacen el sistema (1) *(en particular, $(x^0, y^0) \in \mathfrak{M}$).*

[1] Jacobi K. G. (1804—1851), un matemático alemán.

Entonces, cualquiera que sea $b_0 > 0$, *existe un rectángulo*

$$\Delta = \{|x_j - x_j^0| < a \ (j = 1, \ldots, n),$$
$$|y_i - y_i^0| < b \quad (i = 1, \ldots, m)\}, \quad b < b_0 \tag{3}$$

perteneciente a Ω, *tal que el conjunto* $\mathfrak{M}\ \Delta$ *se describe por las funciones continuamente diferenciables*

$$y_i = \psi_i(x) \ (i = 1, \ldots, m), \quad x \in \Delta^0, \tag{4}$$
$$\Delta^0 = \{|x_j - x_j^0| < a, \quad j = 1, \ldots, n\}. \tag{5}$$

En otras palabras, el rectángulo Δ posee la propiedad de que en su proyección Δ^0 sobre un subespacio coordenado $(x_1, \ldots, x_n)$ pueden definirse las funciones continuamente diferenciables (4) que satisfacen las ecuaciones (1):

$$f_j(x, \psi_1(x), \ldots, \psi_m(x)) \equiv 0,$$
$$x \in \Delta^0 \ (j = 1, \ldots, m)$$

y las desigualdades $|\psi_j(x) - y_j^0| < b$. Las funciones citadas son únicas en el sentido de que cualquier punto $(x, y) \in \mathfrak{M}\ \Delta$ tiene las coordenadas asociadas con las ecuaciones (4).

En particular, $y_j^0 = \psi_j(x^0)$ $(j = 1, \ldots, m)$, puesto que $(x^0, y^0) \in \mathfrak{M}\ \Delta$.

Observación 1. En el teorema puede considerarse que el rectángulo Δ y su proyección Δ^0 se determinan por las desigualdades

$$\Delta = \{|x_j - x_j^0| < a_j \quad (j = 1, \ldots, n);$$
$$|y_i - y_i^0| < b_i \quad (i = 1, \ldots, m)\}, \tag{3*}$$
$$\Delta^0 = \{|x_j - x_j^0| < a_j, \quad j = 1, \ldots, n\}, \tag{5*}$$

donde los números a_j, b_i son, en el caso general, diferentes. En efecto, si el teorema es lícito para el rectángulo (3) con ciertos a_j, b_i, entonces, al poner $b = \min b_i$, podemos, por ser las funciones ψ_i continuas, indicar tal número $a < a_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ que los puntos

$$(x, \psi_1(x), \ldots, \psi_m(x)) \text{ con } x \in \{|x_j - x_j^0| < a,$$
$$j = 1, \ldots, n\}$$

queden ubicados en el rectángulo (3).

Hemos de notar, sin embargo, que en general no es posible conseguir que a y b en (3) sean iguales, de lo que es fácil convencerse tomando como ejemplo una ecuación $F(x, y) = y - x^2 = 0$, $x_0 = y_0 = 0$.

Demos la demostración del teorema 1 sólo para un caso particular de dos ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

Se debe demostrar que si las funciones f_1 y f_2 son continuamente diferenciables en cierto entorno del punto $M^0 = (x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0) \in R_4$, que satisface las ecuaciones (1′), y si el jacobiano

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2'}$$

en M^0, entonces para cualquier $b_0 > 0$ se encontrará un rectángulo

$$\Delta = \{|x_1 - x_1^0| < a, \quad |x_2 - x_2^0| < a, \quad |y_1 - y_1^0| < b,$$
$$|y_2 - y_2^0| < b\} \quad (b < b_0), \tag{3'}$$

perteneciente a dicho entorno, y existen, además, las funciones continuamente diferenciables

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \psi_1(x_1, x_2), \\ y_2 &= \psi_2(x_1, x_2), \end{aligned}\right\} \quad (x_1, x_2) \in \Delta^0, \tag{4'}$$

definidas en su proyección

$$\Delta^0 = \{|x_1 - x_1^0| < a, \quad |x_2 - x_2^0| < a\}, \tag{5'}$$

tales que satisfacen las ecuaciones (1) y poseen las propiedades

$$y_1^0 = \psi_1(x_1^0, x_2^0), \quad y_2^0 = \psi_2(x_1^0, x_2^0).$$

En este caso, para $(x_1, x_2) \in \Delta^0$

$$(x_1, x_2, \psi_1(x_1, x_2), \quad \psi_2(x_1, x_2)) \in \Delta. \tag{6}$$

Las funciones citadas ψ_1, ψ_2 son las únicas que describen todas las soluciones de las ecuaciones (1′) en el rectángulo Δ, en otras palabras, si alguno de los puntos $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \Delta$ satisface las ecuaciones (1′), sus coordenadas están asociadas por las relaciones (4′).

De lo que el jacobiano (2′) es distinto de cero en M^0 proviene que uno de sus elementos no es igual a cero en M^0. Sin perturbar la generalidad consideramos que

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} \neq 0. \tag{7}$$

Esto siempre puede obtenerse renumerando f_1, f_2 e y_1, y_2, si sea necesario.

Por cuanto las derivadas parciales de f_1 y f_2 son, por hipótesis, continuas, existe, pues, un entorno suficientemente pequeño del punto M^0, en el cual no sólo el jacobiano (2′) sino también la derivada $\frac{\partial f_1}{\partial y_1}$ son distintos de cero. Mas, en este caso, para la primera ecuación en (1′), si se examina ésta respecto a la función desconocida y_1 de (x_1, x_2, y_2), se cumplen las condiciones del teorema 1′ del § 8.15. Por eso para cualquier b_0 existe un rectángulo

$$\Delta_1 = \{|x_1 - x_1^0| < \alpha, \quad |x_2 - x_2^0| < \alpha, \quad |y_2 - y_2^0| < \beta,$$
$$|y_1 - y_1^0| < \gamma\} \quad (\gamma < b_0) \tag{8}$$

y una función continuamente diferenciable

$$y_1 = \varphi(x_1, x_2, y_2), \tag{9}$$
$$(x_1, x_2, y_2) \in \Delta_1^0 = \{|x_1 - x_1^0| < \alpha,$$
$$|x_2 - x_2^0| < \alpha, \quad |y_2 - y_2^0| < \beta\},$$

que satisface la primera ecuación de (1'):

$$f_1(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2, y_2), y_2) = 0, \tag{10}$$

donde

$$(x_1, x_2, y_2) \in \Delta_1^0 \quad (x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2, y_2), y_2) \in \Delta_1. \tag{11}$$

La función φ es única en el sentido de que cualquier punto (x_1, x_2, y_1, y_2), que pertenece a Δ_1 y satisface la primera ecuación de (1'), tiene coordenadas asociadas por la igualdad (9); en particular,

$$y_1^0 = \varphi(x_1^0, x_2^0, y_2^0). \tag{12}$$

Observación 2. Cabe notar que en (8) podríamos considerar en la primera etapa $\alpha = \beta$. Pero en lo sucesivo nos veremos obligados a reducir algo los números α y β, de una manera que en el caso general, no sea proporcional. Los números α y β reducidos son aptos también para la primera etapa de los razonamientos que actualmente se analizan.

Así pues, se ha obtenido la identidad (10) que es válida cualesquiera que sean $(x_1, x_2, y_2) \in \Delta_1^0$ independientes. Pero esta identidad sigue siendo cierta aun cuando se considera que y_2 es cualquier función continuamente diferenciable $y_2 = \Psi_2(x_1, x_2)$, tal, no obstante, que

$$(x_1, x_2, \Psi_2(x_1, x_2)) \in \Delta_1^0. \tag{13}$$

Se sabe que hay una infinidad de funciones ψ_2. Nuestro objetivo consiste en elegir entre ellas una función tal que las funciones

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \varphi(x_1, x_2, \psi_2(x_1, x_2)) = \psi_1(x_1, x_2), \\ y_2 &= \psi_2(x_1, x_2) \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

satisfagan idénticamente la segunda ecuación de (1'). La primera ecuación de (1') ellas ya satisfacen.

Así pues, sustituyamos la función hallada φ en la segunda ecuación de (1'):

$$f_2(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2, y_2), y_2) = 0 \tag{15}$$

y buscaremos una función y_2 de (x_1, x_2) que satisfaga dicha ecuación. Pongamos

$$\Phi(x_1, x_2, y_2) = f_2(x_1, x_2, \varphi(x_1, x_2, y_2), y_2).$$

La función Φ es continuamente diferenciable para cualesquiera $(x_1, x_2, y_2) \in \in \Delta_1^0$ (véase (11)). Ella satisface las igualdades

$$\Phi(x_1^0, x_2^0, y_2^0) = f_2(x_1^0, x_2^0, \varphi(x_1^0, x_2^0, y_2^0), y_2^0) = \\ = f_2(x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0) = 0$$

(véase la condición del teorema y (12)). Además,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_2} \neq 0.$$

En efecto, para los puntos $(x_1, x_2, y_2) \in \Delta_1^0$ (las explicaciones vienen más abajo)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_2} = \frac{\partial f_2}{\partial y_1}\frac{\partial \varphi}{\partial y_2} + \frac{\partial f_2}{\partial y_2} = \frac{\partial f_2}{\partial y_1}\left(-\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\bigg/\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\right) + \\ + \frac{\partial f_2}{\partial y_2} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{\partial f_2}{\partial y_2} - \frac{\partial f_2}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\right)\bigg/\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = \\ = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} \bigg/ \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \neq 0. \tag{16}$$

En la primera igualdad de (16) se ha aplicado la regla referente a la derivada de una función compuesta, en la segunda igualdad es menester tomar en consideración que, de acuerdo con (10),

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_2} = -\frac{\partial f_1}{\partial y_2} \bigg/ \frac{\partial f_1}{\partial y_1}.$$

Desde luego, consideramos, al escribir las derivadas parciales de f_1 y f_2, que ellas se calculan en los puntos $x_1 = x_1$, $x_2 = x_2$, $y_1 = \varphi(x_1, x_2, y_2)$, $y_2 = y_2$. En la última relación de (16) se debe tener en cuenta (2') y (7).

Vemos que el primer miembro de la igualdad (15) satisface todas las condiciones del teorema 1' del § 8.15. Por tanto, en el rectángulo Δ_1^0 (véase (9)) se encontrará un rectángulo nuevo, más pequeño en el caso general, el cual se designará nuevamente con Δ_1^0 (véase más arriba la Observación 2) y se encontrará una función continuamente diferenciable

$$y_2 = \psi_2(x_1, x_2),$$
$$(x_1, x_2) \in \Delta^0 = \{|x_1 - x_1^0| < \alpha, \quad |x_2 - x_2^0| < \alpha\},$$
$$(x_1, x_2, \psi_2(x_1, x_2)) \in \Delta_1^0,$$

que satisface la ecuación (15):

$$\Phi(x_1, x_2, \psi_2(x_1, x_2)) = f_2(x_1, x_2, \varphi \times$$
$$\times (x_1, x_2, \psi_2(x_1, x_2)), \psi_2(x_1, x_2)) =$$
$$= f_2(x_1, x_2, \psi_1(x_1, x_2), \psi_2(x_1, x_2)) = 0,$$

$$(x_1, x_2) \in \Delta^0, \quad (x_1, x_2, \psi_2(x_1, x_2)) \in \Delta_1^0, \psi_2(x_1^0, x_2^0) = y_2^0,$$

donde cualquier punto $(x_1, x_2, y_2) \in \Delta_1^0$, que satisface la ecuación (15), tiene coordenadas asociadas por la igualdad $y_2 = \psi_2(x_1, x_2)$. Pero, en este caso se verifica también la relación (véase (11))

$$(x_1, x_2, \psi_1(x_1, x_2), \psi_2(x_1, x_2)) \in \Delta_1.$$

Por consiguiente, queda demostrada la existencia de las funciones continuamente diferenciables

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \psi_1(x_1, x_2), \\ y_2 &= \psi_2(x_1, x_2), \end{aligned}\right\} \quad (x_1, x_2) \in \Delta^0,$$

que satisfacen ambas ecuaciones (1') y, además, de un modo tal que

$$y_1^0 = \psi_1(x_1^0, x_2^0), \quad y_2^0 = \psi_2(x_1^0, x_2^0).$$

En este caso

$$(x_1, x_2, \psi_1(x_1, x_2), \psi_2(x_1, x_2)) \in \Delta_1 \tag{17}$$

y cualquier punto $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \Delta_1$, que satisface las ecuaciones (1'), tiene la forma igual a la indicada en (17).

El paso de Δ_1 a Δ puede realizarse con ayuda de la Observación 1.

Observación 3. Veamos un método para hallar las derivadas parciales $\frac{\partial y_j}{\partial x_k}$. Supongamos cumplidas todas las condiciones del teorema 1. Entonces, al sustituir las funciones $y_j = \psi_j(x)$ en (1), obtenemos un sistema de identidades:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, \psi_1(x), \ldots, \psi_m(x)) &\equiv 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_m(x, \psi_1(x), \ldots, \psi_m(x)) &\equiv 0. \end{aligned}\right\}. \tag{18}$$

22*

Diferenciando cada identidad del sistema (18) por x_k como una función compuesta, obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f_1}{\partial x_k}+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k}+\ldots+\frac{\partial f_1}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_k}\equiv 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_k}+\frac{\partial f_m}{\partial y_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k}+\ldots+\frac{\partial f_m}{\partial y_m}\frac{\partial \varphi_m}{\partial x_k}\equiv 0.\end{array}\right\} \qquad (19)$$

El sistema (19) es lineal respecto de las derivadas desconocidas $\frac{\partial y_j}{\partial x_k}\equiv$ $\equiv\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}$ $(j=1, \ldots, m)$ cuyo determinante es el jacobiano

$$\frac{D(f_1, \ldots, f_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}\neq 0.$$

Por eso el sistema (19) tiene una única solución:

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_k}=-\frac{D(f_1, \ldots, f_m)}{D(x_k, y_2, \ldots, y_m)}\Big/\frac{D(f_1, \ldots, f_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}, \ldots,$$
$$\frac{\partial y_m}{\partial x_k}=-\frac{D(f_1, \ldots, f_m)}{D(y_1, \ldots, y_{m-1}x_k)}\Big/\frac{D(f_1, \ldots, f_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}.$$

§ 8.18. Aplicaciones

Sea dado un sistema de funciones continuamente diferenciables

$$y_j=\varphi_j(x)=\varphi_j(x_1, \ldots, x_n),\ x\in\Omega \quad (j=1, \ldots, m), \qquad (1)$$

donde Ω es un conjunto abierto de puntos $x=(x_1, \ldots, x_n)$. Diremos que el sistema (1) define una *aplicación continuamente diferenciable*

$$y=Ax, \quad x\in\Omega, \qquad (1')$$

del conjunto Ω sobre cierto conjunto Ω' de puntos $y=(y_1, \ldots, y_m)$. Se escribe $\Omega'=A(\Omega)$ y se denomina Ω' *imagen de* Ω, y Ω se llama *preimagen* (imagen recíproca) *de* Ω' (por medio de la aplicación A).

A la par con A examinemos otra aplicación continuamente diferenciable B:

$$z_j=\psi_j(y)=\psi_j(y_1, \ldots, y_m), \quad y\in\Lambda\ (j=1, \ldots, m),$$

de un conjunto abierto Λ de puntos y sobre cierto conjunto de puntos $z=(z_1, \ldots, z_m)$. De este modo, $z=By$, $y\in\Lambda$.

Observación. Indiquemos que si $x^0\in\Omega$ e $y^0=Ax^0\in\Lambda$ entonces se encontrará, en virtud de la continuidad de A, un entorno V_{x_0} del punto x^0 cuya imagen por medio de A pertenece a Λ. Reduciendo Ω, al suponer $\Omega=V_{x^0}$, llegaremos a que $\Omega'\subset\Lambda$.

Si $\Omega'\subset\Lambda$, podemos considerar una aplicación compuesta continuamente diferenciable $z=BAx$, $x\in\Omega$, definida mediante las igualdades $z_j=\psi_j(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x))$, $x\in\Omega$ $(j=1, \ldots, m)$.

Los jacobianos de las aplicaciones A, B, BA están ligadas por las siguientes igualdades de importancia

$$\frac{D(z_1, \ldots, z_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)} = \left| \frac{\partial z_i}{\partial x_j} \right| = \left| \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial z_i}{\partial y_s} \frac{\partial y_s}{\partial x_j} \right| =$$

$$= \left| \frac{\partial z_i}{\partial y_s} \right| \cdot \left| \frac{\partial y_s}{\partial x_j} \right| = \frac{D(z_1, \ldots, z_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)} \frac{D(y_1, \ldots, y_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)}, \quad (2)$$

cuya demostración, como vemos, está basada en el empleo de la fórmula para la derivada de una función compuesta y de la regla de multiplicación de los determinantes.

En particular, si B aplica A sobre el conjunto de puntos $x \in \Omega$, es decir, si $x = BAx$, $x \in \Omega$, es una aplicación idéntica, entonces, debido a qu su jacobiano es igual a 1, obtendremos la fórmula

$$1 = \frac{D(x_1, \ldots, x_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)} \cdot \frac{D(y_1, \ldots, y_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)}, \quad x \in \Omega. \quad (3)$$

Supondremos ahora que la aplicación continuamente diferenciable $y = Ax$, que se determina por las igualdades (1), tiene el jacobiano

$$\frac{D(y_1, \ldots, y_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)} \neq 0, \quad x \in \Omega,$$

que es distinto de cero en todo punto del conjunto abierto Ω.

Demos a conocer sin demostración las siguientes propiedades:

1) $\Omega' = A(\Omega)$ es un conjunto abierto (¡junto con Ω!),

2) si Ω es un dominio, será también un dominio Ω',

3) la aplicación A es biunívoca localmente, es decir, para cualquier punto $x^0 \in \Omega$ existe tal esfera $V \subset \Omega$, con centro en dicho punto, que la aplicación A, examinada sólo en V, es biunívoca.

La propiedad 3) afirma sólo la biunivocidad local. La biunivocidad global no existe en general. Por ejemplo, la aplicación $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \operatorname{sen} \theta$ de las coordenadas polares de los puntos de un plano en las cartesianas, para $\rho > 0$ y θ arbitrario, es continuamente diferenciable y tiene un jacobiano positivo igual a ρ. Aplica los puntos (ρ, θ) $(\rho > 0, -\infty < \theta < \infty)$ del plano (ρ, θ) en los puntos (x, y), distintos del punto nulo, de un modo biunívoco local. No obstante, aunque a todo punto (x, y) le corresponde un único valor de ρ, hay una infinidad de distintos valores de θ, que se diferencian en $2k\pi$ $(k \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

§ 8.19. Extremo condicionado

Examinemos en el espacio R_2 una función $u = F(x, y) = x^2 + y^2$. Es fácil ver que desde el punto de vista geométrico dicha función representa el cuadrado de la distancia entre un punto $P(x, y)$ y el origen de coordenadas de un sistema cartesiano (x, y). La función no tiene valor máximo en R_2. Pero, examinada sólo para los puntos (x, y) de una elipse $G(x, y) \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ $(b > a)$, se pone claro que alcanza su valor máximo en los puntos $P_0(0, b)$ y $P_1 = (0, -b)$ (fig. 103).

De este modo, la función $u = F(P)$, examinada en todo el plano R_2, no tiene valor máximo, pero la misma función adquiere dos veces el valor máximo a condición de que el punto P se dispone en una elipse.

Esta situación nos conduce a un problema en el que se busca un extremo de la función a condición de que los argumentos de la función satisfacen ciertas restricciones adicionales.

Así pues, sea dada una función

$$u = F(P) = F(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$$

de $n + m$ variables. Se requiere hallar el extremo de la función $F(P)$ a condición de que las variables x_i, y_k están enlazadas por m relaciones

$$\left.\begin{array}{l} G_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ G_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Fig. 103

que se llaman, corrientemente, *ecuaciones de enlace*.

El sistema de ecuaciones (1) determina en el espacio R_{n+m}, en el caso general, un cierto conjunto que se llamará *superficie*.

DEFINICIÓN. Diremos que un punto $P^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$, que satisface las ecuaciones (1), es *punto de máximo (mínimo) local condicionado (relativo)*, si en R_{n+m} $\exists$ un entorno del punto P^0 tal que $\forall P$ de este entorno, que satisfacen las ecuaciones de enlace (1), se verifica la desigualdad

$$F(P) \leqslant F(P^0) \quad (F(P) \geqslant F(P^0)).$$

Un punto de máximo o mínimo local condicionado lleva el nombre de *extremo local condicionado (relativo)*.

En el ejemplo examinado más arriba el punto $P^0 = (0, b)$ es un punto de máximo local condicionado, puesto que para todos los puntos P, dispuestos en la elipse, se verifica $u(P) \leqslant u(P_0)$.

Aclaremos primero la cuestión sobre las condiciones que son necesarias para que P^0 sea un punto de extremo relativo local. Sea P^0 un punto de extremo condicionado y supongamos que las funciones $G_1, \ldots, G_m$ tienen derivadas parciales continuas, mientras que el jacobiano en el entorno de dicho punto

$$\frac{D(G_1, \ldots, G_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)} \neq 0. \qquad (2)$$

Según se sabe, el sistema (1) es resoluble respecto de las variables $y_1, \ldots, y_m$ en cierto entorno del punto P^0:

$$y_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, m),$$

donde las funciones $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$ tienen derivadas parciales continuas en el punto $M^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

Sustituyendo estos valores de la función φ_i en F, llegamos a que F será una función de sólo n variables $x_1, \ldots, x_n$, independientes entre sí:

$$F(x_1, \ldots, x_n, \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots \\ \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)) \equiv \Phi(x_1, \ldots, x_n). \qquad (3)$$

Es evidente que si F alcanza su extremo condicionado local en el punto P^0, entonces $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ admite en el punto $M^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ un extremo local corriente, o bien, como suele decirse, extremo local absoluto, y viceversa.

Pero, en tal caso, de acuerdo con lo que ya sabemos, deben verificarse las igualdades

$$\frac{\partial\Phi(M^0)}{\partial x_i} = 0 \ (i = 1, \ldots, n) \text{ o bien } d\Phi(M^0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} dx_i = 0, \qquad (4)$$

donde dx_i $(i = 1, \ldots, n)$ son las diferenciales de las variables independientes.

El punto $P^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$, para el cual se verifican, en virtud de (1) (o de (3)), las igualdades (4), se denominará *punto estacionario de la función F en existencia del enlace* (1).

Hemos demostrado lo siguiente: *para que un punto $P^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$ constituya un extremo condicionado local, es necesario que P_0 sea el punto estacionario de la función F en existencia del enlace* (1).

Nuestros exámenes ulteriores se refieren a la cuestión de cómo hallar el punto estacionario mencionado sin resolver el sistema (1) respecto a las variables $y_1, \ldots, y_m$, aunque vamos a suponer la existencia de las funciones $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$. Escribiremos $(F)_0$, $(\varphi_i)_0$ en lugar de $F(P^0)$, $\varphi_i(M^0)$.

Puesto que la forma de una diferencial de primer orden es invariante, las condiciones (4) son equivalentes a las siguientes:

$$d\Phi(M^0) = dF(P^0) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_0 dx_i + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial F}{\partial y_k}\right)_0 dy_k = 0, \qquad (5)$$

donde las diferenciales dependientes $dy_1, \ldots, dy_m$ que figuran en dF son, respectivamente, iguales a:

$$dy_k = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\right)_0 dx_i \quad (k = 1, \ldots, m).$$

Dichas diferenciales junto con las diferenciales independientes $dx_1, \ldots, dx_n$ están entrelazadas por las relaciones

$$dG_i(P^0) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial G_i}{\partial x_j}\right)_0 dx_j + \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\partial G_i}{\partial y_k}\right)_0 dy_k = 0 \quad (i = 1, \ldots, m), \tag{6}$$

las cuales se obtienen de las ecuaciones de enlace.

Así pues, un punto estacionario de la función F puede ser, además, definida, en existencia del enlace (1), como un punto $P^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$, satisfaciente las ecuaciones (1), tal que para él se verifican las igualdades (5), cualesquiera que sean $dx_1, \ldots, dx_n, dy_1, \ldots, dy_m$, para las cuales tienen lugar las igualdades (6).

Introduzcamos los vectores $(n+m)$-dimensionales

$$\operatorname{grad}{}_0 G_j = \operatorname{grad} G_j(P^0) = \left(\left(\frac{\partial G_j}{\partial x_1}\right)_0, \ldots, \left(\frac{\partial G_j}{\partial x_n}\right)_0, \left(\frac{\partial G_j}{\partial y_1}\right)_0, \ldots, \left(\frac{\partial G_j}{\partial y_m}\right)_0\right) \quad (j = 1, \ldots, m),$$

$$\operatorname{grad}{}_0 F = \operatorname{grad} F(P^0) = \left(\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)_0, \ldots, \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)_0, \left(\frac{\partial F}{\partial y_1}\right)_0, \ldots, \left(\frac{\partial F}{\partial y_m}\right)_0\right),$$

$$dz = (dx_1, \ldots, dx_n, dy_1, \ldots, dy_m).$$

En el lenguaje de estos vectores las ecuaciones (5) y (6) pueden anotarse en términos de los productos escalares

$$(\operatorname{grad}_0 F, dz) = 0, \tag{5'}$$

$$(\operatorname{grad}_0 G_j, dz) = 0 \quad (j = 1, \ldots, m). \tag{6'}$$

Resulta pues que $P^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$ es un punto estacionario en existencia del enlace (1), cuando, y sólo cuando, satisface las ecuaciones (1), y, además, si de lo que uno de los vectores dz es ortogonal a los gradientes $\operatorname{grad}_0 G_1, \ldots, \operatorname{grad}_0 G_m$ se deduce que es también ortogonal a $\operatorname{grad}_0 F$. Pero, en tal caso (las explicaciones vienen más abajo) existe un sistema (y, además, único) de números $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ tal que

$$\operatorname{grad}{}_0 F = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \operatorname{grad}{}_0 G_k. \tag{7}$$

La afirmación inversa es también cierta. Si se sabe que $\operatorname{grad}_0 F$ puede ser representado, para ciertos números $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, en la forma (7), es decir, como una combinación lineal de los gradientes $\operatorname{grad}_0 G_k$ $(k = 1, \ldots, m)$, de aquí proviene directamente que si uno de los vectores dz es ortogonal a los gradientes $\operatorname{grad}_0 G_k$, será automáticamente ortogonal a $\operatorname{grad}_0 F$.

No hay ninguna dificultad en convencerse de la validez de la afirmación inversa: de (7) y (6′) se desprende que

$$(\operatorname{grad}_0 F,\ dz) = \Big(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k \operatorname{grad}_0 G_k,\ dz\Big) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \lambda_k (\operatorname{grad}_0 G_k,\ dz) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cdot 0 = 0.$$

En lo que se refiere a la afirmación directa, alegaremos un teorema del álgebra lineal[1]). No obstante, daremos algunas explicaciones.

Sea L un subespacio lineal R_{n+m} tendido sobre los vectores $\operatorname{grad}_0 G_j$ $(j = 1, \ldots, m)$, es decir, un conjunto de combinaciones lineales de la forma (7) correspondientes a toda clase de sistemas de números $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Introduzcamos un subespacio L' de vectores dz, ortogonal a L, es decir, L' se compone de todos los vectores dz ortogonales a L, o bien, que es igual, ortogonales a los vectores $\operatorname{grad}_0 G_j$ $(j = 1, \ldots, m)$. Si[2]) L' es ortogonal a L, entonces, viceversa, L es ortogonal a L', es decir, L consta de todos los vectores ortogonales a L'. De conformidad con lo dicho anteriormente, en un punto estacionario P^0 el gradiente de F es ortogonal a todos los vectores dz ortogonales a los gradientes G_j, es decir, el gradiente de F ortogonal a L'. Pero, entonces, de acuerdo con el teorema citado, el gradiente de F pertenece a L, y, de este modo, representa cierta combinación lineal de gradientes G_j y es ésta una combinación lineal única, puesto que los gradientes G_j $(j = 1, \ldots, m)$ forman en R_{n+m} un sistema lineal independiente. El hecho es que la matriz formada de las derivadas parciales de las funciones G_j

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial G_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial G_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial G_1}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial G_1}{\partial y_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial G_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial G_m}{\partial x_n} & \dfrac{\partial G_m}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial G_m}{\partial y_m} \end{matrix} \right\| \qquad (8)$$

es de rango m en el entorno del punto P^0, puesto que supusimos cierta la condición (2); mas, en este caso, las filas de esta matriz determinan los vectores (gradientes) que forman un sistema lineal independiente[3]).

De lo dicho se infiere que un punto estacionario de la función F puede ser definido, además (en existencia del enlace (1)), del modo siguiente: *es tal punto* $P^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$, *satisfaciente*

[1]) Véase nuestro libro «Matemáticas superiores. Elementos del álgebra lineal y de la geometría analítica», § 18, teoremas 1, 2 y el corolario 1.

[2]) Véase el teorema 1 § 19 del mismo libro.

[3]) Véase § 13 del libro citado.

las condiciones (1), *para el cual el gradiente de* F *es una combinación lineal de gradientes* G_j $(j = 1, \ldots, m)$

$$\operatorname{grad}_0 F = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \operatorname{grad}_0 G_j.$$

Podemos también decir así: *para que un punto*

$$P^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$$

sea estacionario para la función F *en existencia del enlace*(1), *es necesario y suficiente que para dicho punto existan los números* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, *para los cuales se verifica la igualdad* (7).

Por cuanto el rango de la matriz (8) en el punto P^0 es m, a todo punto estacionario le corresponde un único sistema de números $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, para los cuales tiene lugar la igualdad (7). La igualdad (7) es equivalente a la siguiente:

$$\operatorname{grad}_0 \left[F - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j G_j\right] = 0. \tag{9}$$

La función que interviene bajo el signo de gradiente en (9)

$$L(P, \lambda) = F(P) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j G_j(P), \quad \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m),$$

lleva el nombre *de Lagrange*, y los números λ_j se denominan *factores de Lagrange*.

Escribamos las condiciones (9) en la forma desarrollada:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_j} &= \frac{\partial F}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial G_i}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, \ldots, n), \\ \frac{\partial L}{\partial y_k} &= \frac{\partial F}{\partial y_k} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial G_i}{\partial y_k} = 0 \quad (k = 1, \ldots, m). \end{aligned}\right\} \tag{9'}$$

El problema de buscar los puntos estacionarios de F en existencia del enlace (1) se ha reducido a la resolución de un sistema compuesto por las ecuaciones (1) y (9′).

Resumimos lo dicho más arriba.

Para hallar el punto estacionario

$$P^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$$

de la función F en existencia del enlace, se debe formar una función de Lagrange y un sistema de ecuaciones (9) y resolver dicho sistema en conjunto con las ecuaciones de enlace (1). Habrá en total $n + 2m$ ecuaciones con $n + 2m$ incógnitas $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m, \lambda_1, \ldots$

$\ldots, \lambda_m$. La resolución del sistema respecto de x_i e y_i dará un punto $(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0)$ el cual será estacionario. Los puntos de extremo condicionado local se encuentran entre los puntos estacionarios. La resolución del problema de si el punto estacionario P^0 es, de hecho, un punto de extremo condicionado, resulta más cómoda al examinar la segunda diferencial de la función de Lagrange. Al determinar el signo de $d^2L\ (P^0, \lambda)$, se debe tomar en cuenta que las diferenciales dy_k dependen de las dx_i.

EJEMPLO. Sea dada en el plano xOy una figura limitada por los ejes de coordenadas y una parábola $y + x^2 - 3 = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant \sqrt{3})$. Inscríbase en esta figura un rectángulo, cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados y uno de sus vértices $M = (x, y)$ se dispone en la parábola citada, de un modo tal que el área del rectángulo sea máxima (fig. 104).

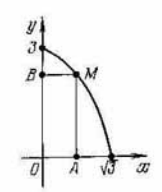


Fig. 104

Resolución. Sean x e y las coordenadas del vértice M. El área del rectángulo será $S = xy$. Luego, como el punto M se dispone en la parábola, sus coordenadas han de satisfacer la ecuación de la parábola: $y + x^2 - 3 = 0$. De este modo, hay que analizar el extremo condicionado de la función $S = xy$ en existencia del enlace $y + x^2 - 3 = 0$. Formemos la función de Lagrange $L(x, y, \lambda) = xy - \lambda(y + x^2 - 3)$. Hallemos los puntos estacionarios partiendo de las ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = y - 2\lambda x = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = x - \lambda = 0, \\ y + x^2 - 3 = 0. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema, encontramos que $x = 1$, $y = 2$, $\lambda = 1$. De este modo, el punto (1, 2) es estacionario y le corresponde un factor de Lagrange $\lambda = 1$. Investiguemos en el punto estacionario la segunda diferencial de Lagrange

$$L(x, y, 1) = xy - y - x^2 + 3.$$

Tenemos

$$d^2L(x, y, 1) = L''_{x^2}\ dx^2 + 2L''_{xy}dx\,dy + L''_{y^2}\ dy^2 = 2dx(dy - dx).$$

Si dx y dy se consideran como diferenciales de las variables independientes, entonces $d^2L(x, y, 1)$ no está definida por su signo. No obstante, de la ecuación de enlace se ve que $dy = -2x\,dx$, y en el punto (1, 2) $dy = -2x$. De este modo,

$$d^2L(1, 2, 1) = -6dx^2 < 0 \quad (dx \neq 0),$$

y, por consiguiente, el incremento de la función $L(x, y, \lambda)$ en el punto $x = 1$, $y = 2$, $\lambda = 1$, correspondiente al incremento de x, igual a $dx \neq 0$, es también inferior a cero ($\Delta L(1, 2, 1) < 0$). Quiere decir, la función $S = xy$ tiene en el punto (1, 2) un máximo condicionado local, puesto que en la parábola $y + x^2 - 3 = 0$ se tiene $\Delta S = \Delta L$.

Así, pues, de todos los rectángulos del tipo indicado la mayor área tiene un rectángulo cuyos lados son $OA = 1$, $OB = 2$.

Capítulo 9

Series

§ 9.1. Concepto de serie

Una expresión

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots, \tag{1}$$

donde los números u_k (*términos de la serie*), que son en el caso general complejos, dependen de los índices $k = 0, 1, 2, \ldots$, se denomina *serie*. A esta expresión no se le ha asignado ningún número, puesto que la adición de un número infinito de sumandos no tiene sentido. La serie (1) se anota también en la siguiente forma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \sum_{0}^{\infty} u_k. \tag{2}$$

Esta notación puramente formal resulta a menudo más cómoda que la forma (1).

Los números

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

llevan el nombre de *n-ésimas sumas parciales de la serie* (1).

Por definición, la serie (1) converge, si existe un límite

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

En este caso se escribe

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} u_k \tag{3}$$

y S se llama *suma de la serie*, es decir, a las expresiones (1) ó (2) se les asigna el número S. Suele decirse, además, que la serie (3) *converge hacia* S.

Observación. La igualdad $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, donde S_n son complejos, se define igual que para los números reales S_n, S, es decir, ella significa que $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N$: $|S_n - S| < \varepsilon$, $\forall n > N$. Aquí $|S_n - S|$ es el módulo de la diferencia entre dos números complejos S_n, S. Para las variables complejas se demuestra, sumamente igual que para las variables reales, que el límite de una suma, una diferencia, un producto y un cociente de las variables u_n, v_n es igual a la suma,

la diferencia, el producto y el cociente, respectivamente, de los límites de estas variables, haciéndose una especificación corriente para el caso de un cociente (lím $v_n \neq 0$).

En virtud del criterio de Cauchy (válido también para una sucesión de números complejos), *para que la serie* (1) *converja, es necesario y suficiente que para cualquier* $\varepsilon > 0$ *exista un* N *tal que se cumpla la desigualdad*

$$|u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}| = |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon,$$

cualesquiera que sean $n > N$ *y* p *naturales.*

De aquí proviene en particular (suponiendo $p = 1$) que si la serie (1) converge, su término general tiende a cero:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0. \tag{4}$$

Pero la condición (4), aunque es necesario, no será suficiente para la convergencia de la serie, lo que veremos de los ejemplos a seguir.

Veamos una serie más

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} u_{n+k}. \tag{5}$$

Por cuanto el criterio de Cauchy para la convergencia de las series (1) y (5) se enuncia sumamente igual, éstas convergen simultáneamente o bien divergen (no convergen) simultáneamente. Si dichas series convergen, la suma de la serie (5) es igual a

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} u_{n+k} = \lim_{m\to\infty} (S_{n+m} - S_n) = S - S_n.$$

La serie (5) se llama *resto o término residual de la serie* (1).

Si los términos de la serie (1) son no negativos (y, de este modo, reales), sus sumas parciales forman una sucesión no decreciente $S_1 \leqslant S_2 \leqslant S_3 \ldots$, razón por la cual, siendo la sucesión citada acotada,

$$S_n \leqslant M \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

la serie converge y su suma satisface la desigualdad

$$\lim_{n\to\infty} S_n + S \leqslant M.$$

Si, en cambio, no está acotada, la serie diverge:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty.$$

En este caso suele escribirse

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k = \infty.$$

EJEMPLO. La suma parcial de la serie

$$1 + z + z^2 + \ldots \tag{6}$$

es igual, para $z \neq 1$, a $S_n(z) = (1 - z^{n+1})/(1 - z)$. Si $|z| < 1$, entonces $|z^{n+1}| = |z|^{n+1}$ y $z^{n+1} \to 0$ $(n \to \infty)$. De este modo, la serie (6) converge y tiene la suma igual a $(1 - z)^{-1}$ en el círculo abierto $|z| < 1$. En cambio, si $|z| \geq 1$, la serie (6) será divergente, puesto que en este caso su término general, cuyo módulo no es inferior a la unidad $(|z^n| \geq 1)$, no tiende a cero cuando $n \to \infty$.

§ 9.2. Integral impropia y una serie

Veamos una integral

$$\int_a^b f(x)\, dx, \tag{1}$$

que tiene en el punto b una única singularidad. Sea

$$a = b_0 < b_1 < b_2 < \ldots < b, \quad b_k \to b.$$

Podemos, entonces, determinar la serie

$$\int_{b_0}^{b_1} f(x)\, dx + \int_{b_1}^{b_2} f(x)\, dx + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{b_k}^{b_{k+1}} f(dx), \tag{2}$$

cuyo k-ésimo término es igual a

$$u_k = \int_{b_k}^{b_{k+1}} f\, dx.$$

TEOREMA 1. *Si la serie (1) converge, será convergente también la serie (2) y se verifica la igualdad*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_0^{\infty} \int_{b_k}^{b_{k+1}} f\, dx. \tag{3}$$

En efecto,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_0^n \int_{b_k}^{b_{k+1}} f\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{b_0}^{b_{n+1}} f\, dx = \int_a^b f\, dx.$$

Si f no es negativa en $[a, b)$, entonces, viceversa, de la convergencia de la serie (2) proviene la convergencia de la integral (1). Efectivamente, supongamos que la serie converge y tiene la suma igual a S. Para todo b', donde $a < b' < b$, puede indicarse tal $n' = n(b')$ que $\forall n > n'$, $b' < b_n$. Por eso, teniendo presente que $f(x) \geqslant 0$,

$$\int_a^{b'} f\,dx \leqslant \int_a^{b_n} f\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{b_k}^{b_{k+1}} f\,dx \leqslant S,$$

es decir, la integral en el primer miembro está acotada y, por ende, la integral impropia (1) existe. Mas en este caso, se verifica la igualdad (3), según lo demostrado anteriormente.

Si la función f no conserva su signo en $[a, b)$, entonces de la convergencia de la serie (2) no proviene en general la convergencia de la integral.

Por ejemplo, la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \operatorname{sen} x\,dx = \sum_{0}^{\infty} 0 = 0$$

es convergente, mientras que la integral $\int_0^{\infty} \operatorname{sen} x\,dx$ diverge, puesto que la función de x

$$\int_0^x \operatorname{sen} t\,dt = 1 - \cos x$$

no tiende a un límite cuando $x \to \infty$.

TEOREMA 2. *Si una función $f(x) \geqslant 0$ es continua y no crece en $[0, \infty)$, la integral*

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx \tag{3'}$$

y la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(k) = f(0) + f(1) + f(2) + \ldots \tag{4}$$

son convergentes o no lo son simultáneamente.

Demostración. Tienen lugar las desigualdades

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant f(k) \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

Sumándolas según k, obtenemos

$$\sum_{1}^{n+1} f(k) = \sum_{0}^{n} f(k+1) \leqslant \int_{0}^{n+1} f(x)\,(dx) \leqslant \sum_{0}^{n} f(k).$$

De aquí, al tomar en consideración que todos los miembros en estas relaciones no decrecen monótonamente al crecer n, se deduce la afirmación del teorema.

Del teorema demostrado se desprende que una serie

$$1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\ldots \tag{5}$$

converge para $\alpha > 1$ y diverge para $\alpha \leqslant 1$, puesto que la función $1/(1+x)^{\alpha}$ es continua cuando $\alpha > 0$ y decrece monótonamente en $[0, \infty)$, con la particularidad de que

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(1+x)^{\alpha}} \begin{cases} < \infty & (\alpha > 1), \\ = \infty & (\alpha \leqslant 1). \end{cases}$$

La serie (5) puede servir (para $0 < \alpha \leqslant 1$) de ejemplo de una serie divergente provista de un término general ($u_n = n^{-\alpha}$) que tiende a cero.

En el caso en que $\alpha \leqslant 0$ vemos inmediatamente que la serie (5) diverge (el término general no tiende a cero).

§ 9.3. Operaciones con las series

Si las series $\sum_{0}^{\infty} u_k$, $\sum_{0}^{\infty} v_k$ *convergen y* α *es un número, entonces las series* $\sum_{0}^{\infty} \alpha u_k$, $\sum_{0}^{\infty} (u_k \pm v_k)$ *también convergen y*

$$\sum_{0}^{\infty} \alpha u_k = \alpha \sum_{0}^{\infty} u_k, \tag{1}$$

$$\sum_{0}^{\infty} (u_k \pm v_k) = \sum_{0}^{\infty} u_k \pm \sum_{0}^{\infty} v_k. \tag{2}$$

Efectivamente,

$$\sum_{0}^{\infty} \alpha u_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{0}^{n} \alpha u_k = \alpha \lim_{n\to\infty} \sum_{0}^{n} u_k = \alpha \sum_{0}^{\infty} u_k,$$

$$\sum_{0}^{\infty} (u_k \pm v_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{0}^{n} (u_k \pm v_k) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{0}^{n} u_k \pm \lim_{n\to\infty} \sum_{0}^{n} v_k = \sum_{0}^{\infty} u_k \pm \sum_{0}^{\infty} v_k.$$

Subrayemos que la convergencia de la serie que figura a la izquierda en (2) no implica ni mucho menos que converge cada una de las series que figuran a la derecha en (2). Por ejemplo, la serie

$$(1-1)+(1-1)+\ldots \tag{3}$$

converge (sus términos son todos iguales a cero), pero la expresión $\sum_{0}^{\infty} 1 - \sum_{0}^{\infty} 1$ no tiene sentido, pues, las series que la integran son divergentes.

Si una serie

$$u_0+u_1+u_2+\ldots \tag{4}$$

converge y tiene la suma S, sus términos pueden agruparse de un modo cualquiera (sin permutarlos) y encerrarse entre paréntesis así, por ejemplo:

$$u_0+(u_1+u_2)+(u_3+u_4+u_5)+\ldots,$$

formando una serie nueva cuyos términos son iguales a las sumas de números puestos entre paréntesis. La serie nueva será convergente y, además, hacia S, puesto que sus sumas parciales forman la subsucesión de una sucesión convergente de sumas parciales de la serie (4).

Viceversa, sería ilícito suprimir paréntesis en la serie cuando se trata de un caso general, por ejemplo, después de abrir los paréntesis en la serie convergente (3) se obtiene una serie divergente $1-1+1-\ldots$. No obstante, si entre paréntesis figuran siempre sólo los números no negativos o no positivos, entonces la supresión de paréntesis en tal serie no altera la convergencia de la serie ni el valor de su suma.

§ 9.4. Series de términos no negativos

TEOREMA 1 (CRITERIO DE COMPARACIÓN DE LAS SERIES). *Sean dadas dos series de términos no negativos:*

$$1)\ \sum_{0}^{\infty} u_k, \quad 2)\ \sum_{0}^{\infty} v_k.$$

a) *Si* $u_k \leqslant v_k$ $(k=0, 1, \ldots)$, *la convergencia de la serie* 2) *no significa la convergencia de la serie* 1), *mientras que la divergencia de la serie* 1) *implica la divergencia de la serie* 2).

b) *Si*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{u_k}{v_k} = A > 0, \tag{1}$$

entonces las series 1) y 2) *convergen y divergen simultáneamente.*

Demostración. Supongamos que la serie 2) converge y S es su suma. En este caso

$$\sum_0^n u_k \leqslant \sum_0^n v_k \leqslant S \quad (n=0, 1, \ldots),$$

es decir, las sumas parciales de la serie 1) están acotadas y la serie 1) converge. Su suma S' satisface la desigualdad $S' \leqslant S$.

Supongamos ahora que la serie 1) diverge: entonces (véase el § 9.1) su suma parcial crece indefinidamente junto con n, lo que, en virtud de la desigualdad

$$\sum_0^n u_k \leqslant \sum_0^n v_k \quad (n=0, 1, \ldots),$$

implica el crecimiento ilimitado de las sumas parciales de la serie 2), es decir, la divergencia de la última. Con esto queda demostrada la afirmación a).

Ahora admitamos que tiene lugar (1). Prefijemos un número positivo ε que satisfaga la desigualdad $A - \varepsilon > 0$. De (1) se deducen las desigualdades

$$A-\varepsilon < \frac{u_k}{v_k} < A+\varepsilon, \quad k>N,$$

lícitas para N suficientemente grande, o las desigualdades

$$(A-\varepsilon)\, v_k < u_k < (A+\varepsilon)\, v_k, \quad k > N. \tag{2}$$

Si la serie 2) es convergente, lo será también la serie $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} (A+\varepsilon)\, v_k$, y, en virtud de la segunda desiguadad en (2), converge la serie $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} u_k$, y, por tanto, la serie 1). Viceversa, la convergencia de la serie 1) lleva consigo la convergencia de la serie $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} (A-\varepsilon)\, v_k$, y por tanto, la convergencia de la serie 2).

Análogamente se demuestra que de la divergencia de una serie proviene la divergencia de la otra serie. Con esto queda demostrada la afirmación b).

TEOREMA 2 (CRITERIOS DE D'ALEMBERT[1]). *Sea dada una serie con términos positivos*

$$\sum_0^{\infty} u_k. \tag{3}$$

---

[1]) D'Alembert J. (1717—1783), un matemático francés.

a) *Si*

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant q < 1 \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{4}$$

la serie (3) *será convergente; en cambio, si*

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} \geqslant 1 \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{5}$$

la serie será divergente.

b) *Si*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = q, \tag{6}$$

la serie (3) *converge para* $q < 1$, *y diverge para* $q > 1$.

Demostración. Tenemos

$$u_n = u_0 \frac{u_1}{u_0} \cdot \frac{u_2}{u_1} \cdot \ldots \cdot \frac{u_n}{u_{n-1}} \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{7}$$

por eso, de (4) se infiere que

$$u_n \leqslant u_0 q^n,\ q < 1\ (n = 0,\ 1,\ \ldots),$$

y, como la serie $\sum\limits_{1}^{\infty} u_0 q^n$ converge, junto con ella converge también la serie (3). De (5) se deduce que $u_n \geqslant u_0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, y, como $u_0 > 0$, entonces la serie (3) diverge (el término general no tiende a cero).

Ahora, si se cumple la propiedad (6) y $q < 1$, entonces para un ε positivo tal que $q + \varepsilon < 1$ se tiene $u_{k+1}/u_k < q + \varepsilon < 1$ $(k \geqslant N)$, donde N es suficientemente grande. En virtud del criterio (4), en tal caso la serie $\sum\limits_{N}^{\infty} u_k$ será convergente, y junto con ésta será convergente también la serie (3).

De la propiedad (6) se infiere para $q > 1$ que $u_{k+1}/u_k > 1$ $(k \geqslant N)$, cuando N es suficientemente grande y, en estas condiciones, debido al criterio (5), la serie $\sum\limits_{N}^{\infty} u_k$ diverge y junto con ella diverge también la serie (3).

TEOREMA 3 (CRITERIOS DE CAUCHY). *Sea dada una serie* (3) *con términos positivos.*

a) *Si*

$$\sqrt[k]{u_k} < q < 1 \quad (k=0,\ 1,\ \ldots), \tag{8}$$

la serie (3) *será convergente; en cambio, si*

$$\sqrt[k]{u_k} \geqslant 1 \quad (k=0,\ 1,\ \ldots), \tag{9}$$

la serie (3) *diverge.*

b) *Si*

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{u_k} = q, \tag{10}$$

la serie (3) *converge para* $q < 1$, *y diverge para* $q > 1$.

c) *Si*

$$\overline{\lim} \sqrt[k]{u_k} = q, \tag{11}$$

la serie (3) *converge para* $q < 1$, *y diverge para* $q > 1$.

Demostración. De la desigualdad (8) se deduce que $u_k < q^k$ ($q < 1$, $k = 0, 1, \ldots$), y, puesto que en este caso la serie $\sum\limits_0^\infty q^k$ converge, será convergente también la serie (3). De la desigualdad (9) se desprende que $u_k \geqslant 1$ ($k = 0, 1, \ldots$), es decir, no se cumple la condición necesaria para la convergencia, por lo cual la serie (3) será divergente.

Luego, de la propiedad (10) se deduce, para $q < 1$, que

$$\sqrt[k]{u_k} < q + \varepsilon < 1 \quad (k \geqslant N) \tag{12}$$

para N suficientemente grande, de donde

$$u_k < (q + \varepsilon)^k \quad (k \geqslant N),$$

y, como la serie $\sum\limits_N^\infty (q + \varepsilon)^k$ converge, será convergente también la serie $\sum\limits_N^\infty u_k$, y, junto con ésta, la serie (3). De la propiedad (10) se desprende, para $q > 1$, que $\sqrt[k]{u_k} > 1$, es decir, $u_k > 1$ ($k \geqslant N$) para N suficientemente grande, de donde proviene la divergencia de la serie (3).

De la propiedad (11) (al igual que de la propiedad (10)), para $q < 1$, desprende (12), de donde, de acuerdo con lo demostrado, se desprende la convergencia de la serie (3).

Por fin, supongamos que se cumple la propiedad (11) para $q > 1$. Elijamos un número finito q_1 de un modo tal que sea $1 < q_1 < q$. Debido a la propiedad del límite superior (véase el § 2.10), existe una subsucesión $k_1 < k_2 \ldots$ tal que

$$\sqrt[k_s]{u_{k_s}} > q_1 > 1 \quad (s = 1, 2, \ldots),$$

es decir,

$$u_{k_s} > q_1^{k_s}.$$

Mas, en este caso, $\lim\limits_{s\to\infty} u_{k_s} = \infty$, y la serie (3) diverge.

Observación. Una serie cuyo término general es $u_n = n^{-\alpha}$ ($\alpha > 0$) converge para $\alpha > 1$, y diverge para $\alpha \leqslant 1$ (véase el § 9.2, (5)).

Además, en ambos casos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1, \tag{13}$$

lo mismo que

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=1. \tag{14}$$

De este modo, existen unas series tanto convergentes, como divergentes con los criterios (13) y (14).

Una serie $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ se denomina *armónica* (es divergente, véase el § 9.2, (5)).

EJEMPLOS.

$$1)\ \sum_0^\infty \frac{x^k}{k!}.\quad 2)\ \sum_1^\infty \frac{x^k}{k^\alpha}\ (\alpha>0).\quad 3)\ \sum_1^\infty (e^{1/k}-1).$$

$$4)\ \sum_1^\infty \ln\left(1+\frac{1}{k}\right).\quad 5)\ \sum_1^\infty q^{k+\sqrt{k}}\ (q>0).$$

La serie 1) converge $\forall x\geqslant 0$. Cuando $x=0$, esto es evidente, y para $x>0$ dicha afirmación proviene de lo que $u_{k+1}/u_k = x/(k+1)\to 0$, $k\to\infty$. Más aún, sabemos que esta serie es de Taylor para la función e^x y converge $\forall x$ hacia una suma igual a e^x.

Entre tanto, la serie 2) converge cuando $0\leqslant x<1$, y diverge cuando $x>1$, puesto que, siendo $x>0$, para esta x se tiene $u_{k+1}/u_k = x\,(k/(k+1))^\alpha\to x$, $k\to\infty$; véase la observación anterior para el caso $x=1$. El caso de $x=0$ es trivial.

Las series 3) y 4) divergen en virtud del teorema 1 del § 9.4, puesto que $e^{1/k}-1\approx 1/k\to\infty)$ y $\ln(1+(1/k))\approx 1/k\ (k\to\infty)$ («$\approx$» es el signo de igualdad asintótica, véanse los § 3.9, § 3.10), y la serie armónica $\sum_1^\infty k^{-1}$ diverge.

La serie 5) converge para $0\leqslant q<1$ y diverge para $q>1$, puesto que para ella $\sqrt[k]{u_k}=q^{1+(1/\sqrt{k})}\to q\ (k\to\infty)$. Cuando $q=1$, la serie diverge también: el término general de la serie en este caso es igual a la unidad.

TEOREMA 4. *Supongamos que una serie de términos no negativos*

$$u_0+u_1+u_2+\ldots \tag{15}$$

converge y su suma es igual a S. *Entonces, una serie nueva (enumerada de nuevo), obtenida como resultado de la permutación arbitraria de sus*

términos,

$$u'_0 + u'_1 + u'_2 + \ldots \tag{16}$$

también converge y tiene la misma suma S.

Demostración. Sea

$$S'_n = u'_0 + u'_1 + \ldots + u'_n$$

una suma parcial de la serie (16). Los términos de esta suma tienen los índices $k_0, \ldots, k_n$ como términos de la serie original (15). Sea N el número máximo entre ellos y sea S_N la *N-ésima* suma parcial de la serie (15). Es evidente que $S'_n \leqslant S_N \leqslant S$, y, como n es natural, la serie (16) es convergente y tiene la suma $S' \leqslant S$. Ahora, cambiando de lugar las series (15) y (16), podemos repetir los razonamientos aducidos y obtener que $S \leqslant S'$. Por eso, $S = S'$.

§ 9.5. Serie de Leibniz

Una serie del tipo

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots, \tag{1}$$

donde los números $a_k > 0$ tienden a cero, decreciendo monótonamente ($a_k \geqslant a_{k+1}$; $a_k \to 0$, $k \to \infty$), lleva el nombre *de Leibniz.*

Probemos que la serie de Leibniz converge y que su suma $S \leqslant a_0$.

En efecto, su suma parcial S_{2n+1}, donde $2n + 1$ es un número impar, puede ser escrita en la forma

$$S_{2n+1} = a_0 - (a_1 - a_2) - (a_3 - a_4) - \ldots$$
$$\ldots - (a_{2n-1} - a_{2n}) - a_{2n+1},$$

de donde, evidentemente, sigue que está acotada superiormente por el número a_0:

$$S_{2n+1} \leqslant a_0.$$

Por otra parte, la misma suma puede tener por expresión

$$S_{2n+1} = (a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) \quad \ldots + (a_{2n} - a_{2n+1}),$$

de donde se infiere que ella no decrece monótonamente. Mas, en este caso existe un límite $\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = S \leqslant a_0$. Es obvio también que

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} (S_{2n+1} - a_{2n+1}) = S - 0 = S.$$

El teorema está demostrado.

EJEMPLO. La serie $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$ es, evidentemente, una serie de Leibniz. De este modo, ella converge y su suma S no sobrepasa 1 (efectivamente, $S = \ln 2$, véase el § 4.16, p. 4).

§ 9.6. Series absolutamente convergentes

Una serie de términos complejos

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots \tag{1}$$

se denomina *absolutamente convergente*, siempre que converge la serie compuesta por los módulos de sus términos

$$|u_0| + |u_1| + |u_2| + \ldots \tag{2}$$

Toda serie absolutamente convergente siempre converge.

En efecto, supongamos que la serie (1) converge absolutamente; entonces, converge la serie (2) y, en virtud del criterio de Cauchy, existe, para cualquier $\varepsilon > 0$, tal N que $\varepsilon > |u_{n+1}| + \ldots + |u_{n+p}|$, cualesquiera que sean p y $n > N$. Con mayor razón, en este caso, $\varepsilon > |u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}|$, por lo cual la serie (1) es convergente en virtud del criterio de Cauchy.

Las series convergentes de términos no negativos convergen absolutamente de un modo trivial. La serie $1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \ldots$ $(\alpha > 0)$ converge, puesto que es una serie de Leibniz. No obstante, dicha serie converge absolutamente sólo cuando $\alpha > 1$.

TEOREMA. *Si una serie es absolutamente convergente, entonces, cualquiera que sea la permutación de sus términos, la convergencia de la nueva serie obtenida no se altera y su suma queda la misma.*

Demostración. Demostremos el teorema primero para el caso en que los términos de la serie u_k son números reales.

Pongamos (para u_k reales)

$$u_k^+ = \begin{cases} u_k, & \text{si } u_k \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } u_k < 0, \end{cases} \qquad u_k^- = \begin{cases} -u_k, & \text{si } u_k \leqslant 0, \\ 0, & \text{si } u_k > 0; \end{cases} \tag{3}$$

los números u_k^+ y u_k^- son, obviamente, no negativos y

$$u_k = u_k^+ - u_k^-. \tag{4}$$

Consideremos, a la par con la serie (1), dos series (de términos no negativos)

$$\sum_0^\infty u_k^+ \quad \text{y} \quad \sum_0^\infty u_k^-. \tag{5}$$

Sea la serie (1) absolutamente convergente y admitamos que sus términos son los números reales u_k. Entonces, las series (5) son también convergentes, puesto que, evidentemente, $u_k^+ \leqslant |u_k|$, $u_k^- \leqslant |u_k|$.

Supongamos que una serie, obtenida como resultado de permutar la serie de partida (1), tiene la forma $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$. Intro-

duzcamos para sus términos (como se ha hecho para la serie (1)) los números v_k^+ y v_k^-. Entonces (las explicaciones vienen más abajo)

$$\sum_0^\infty u_k = \sum_0^\infty (u_k^+ - u_k^-) = \sum_0^\infty u_k^+ - \sum_0^\infty u_k^- =$$
$$= \sum_0^\infty v_k^+ - \sum_0^\infty v_k^- = \sum_0^\infty (v_k^+ - v_k^-) = \sum_0^\infty v_k.$$

La primera igualdad de esta cadena se deduce de (4); la segunda, del § 9.3, si se toma en consideración que las series (5) convergen; la tercera igualdad se desprende de lo que las series convergentes de términos no negativos son permutables, la cuarta del § 9.3 (2), y, por fin, la quinta igualdad se verifica, puesto que $v_k = v_k^+ - v_k^-$. El teorema queda demostrado para u_k reales.

Sean ahora $u_k = \alpha_k + i\beta_k$ unos números complejos y supongamos que v_k tienen el mismo sentido que antes. Por cuanto $|\alpha_k| \leqslant |u_k|$, $|\beta_k| \leqslant |u_k|$, entonces las series (de términos reales) $\sum_0^\infty \alpha_k$ y $\sum_0^\infty \beta_k$ convergen absolutamente y sus términos pueden permutarse, lo que acabamos de demostrar. Por ello, considerando que $v_k = \gamma_k + i\delta_k$, obtenemos

$$\sum_0^\infty u_k = \sum_0^\infty (\alpha_k + i\beta_k) = \sum_0^\infty \alpha_k + i\sum_0^\infty \beta_k =$$
$$= \sum_0^\infty \gamma_k + i\sum_0^\infty \delta_k = \sum_0^\infty (\gamma_k + i\delta_k) = \sum_0^\infty v_k.$$

El teorema queda completamente demostrado.

§ 9.7. Series de términos reales que convergen condicionalmente e incondicionalmente

Ya sabemos (de lo expuesto en el párrafo antecedente) que una serie absolutamente convergente de términos reales o complejos queda, permutados sus términos, absolutamente convergente, conservando, además, la misma suma.

Resulta que dicha propiedad de conservar inalterable la suma, después de la permutación de los términos, es propia sólo para las series absolutamente convergentes.

Veamos una serie de términos reales

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots \qquad (1)$$

que es convergente, pero no absolutamente.

Se puede demostrar que, cualquiera que sea el número S, finito o infinito, es decir, un número que satisfaga las desigualdades $-\infty \leqslant S \leqslant +\infty$, existe tal permutación de términos en la serie (1) que, siendo realizada, se obtiene una serie convergente hacia S.

Llamemos una serie *convergente incondicionalmente*, si, cualquiera que sea la permutación de sus términos, queda convergente y, además, hacia la misma suma S. En cambio, si una serie es convergente y existe una permutación de sus términos tal que, realizada dicha permutación, la serie deja de ser convergente o será convergente hacia alguna otra suma, se llamará ésta *condicionalmente convergente*.

De lo dicho más arriba proviene: *para que una serie sea absolutamente convergente, es necesario y suficiente que sea incondicionalmente convergente.*

He aquí una observación más. Sea dada una serie (1) de números reales que es convergente, pero no absolutamente. En la serie (1) hay una infinidad de términos positivos y negativos y, evidentemente, éstos forman por separado las series divergentes (de lo contrario la serie de partida sería absolutamente convergente).

§ 9.8. Sucesiones y series de funciones. Convergencia uniforme

Examinemos una sucesión de funciones $\{f_k(x)\}$ definidas en cierto conjunto de puntos $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de un espacio n-dimensional. Dichas funciones pueden tomar valores complejos ($f_k(x) = \alpha_k(x) + i\beta_k(x)$). Supongamos, además, que x representa los puntos complejos ($x = \xi + i\eta$) que recorren un cierto conjunto E de puntos de un plano complejo; entonces $f_k(x)$ son las funciones de una variable compleja x.

Supongamos que para todo valor $x \in E$ la sucesión $\{f_n(x)\}$ tiende al número $f(x)$ (una función de x).

Por definición, la *sucesión $f_n(x)$ converge (tiende) hacia $f(x)$ uniformemente en E*, siempre que existe una sucesión de números no negativos ρ_n (que no dependen de x), convergente hacia cero, tal que

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \rho_n, \quad \forall x \in E. \tag{1}$$

Esta definición es equivalente a la siguiente: para cualquier $\varepsilon > 0$ existe tal N que con $n > N$ se verifica

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in E.$$

Efectivamente, si se cumple la primera definición, se encontrará para cualquier $\varepsilon > 0$ tal N que

$$\varepsilon \underset{n>N}{>} \rho_n \geqslant |f(x) - f_n(x)|, \quad \forall x \in E,$$

es decir,

$$\varepsilon > |f(x) - f_n(x)|, \quad \forall x \in E, \ n > N. \qquad (2)$$

Viceversa, de acuerdo con la segunda definición, para todo $\varepsilon > 0$ se encontrará tal N que se cumple (2). Entonces

$$\varepsilon \geqslant \sup_{x \in E} |f(x) - f_n(x)| = \rho_n, \quad n > N. \qquad (3)$$

Vemos, pues, que los números no negativos ρ_n no dependen de x, y $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \rho_n$, $\rho_n \to 0$, es decir, se cumple la primera definición.

En la primera definición podemos tomar a título de ρ_n la cota superior exacta

$$\sup_{x \in E} |f(x) - f_n(x)| = \rho_n.$$

Si ésta tiende a cero para $n \to \infty$ ($\rho_n \to 0$), entonces $f_n(x)$ tiende a $f(x)$ uniformemente en E, y si no tiende, entonces, de una manera no uniforme.

Podemos ofrecer también la tercera definición de convergencia uniforme (en términos del criterio de Cauchy): una sucesión $\{f_n(x)\}$ converje uniformemente en E, si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe tal N que se cumple la desigualdad

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \qquad (4)$$

cualesquiera que sean $n > N$ y $p > 0$, y para todo $x \in E$.

De lo que la sucesión converge uniformemente en el sentido de la segunda definición se deduce que para cualquier $\varepsilon > 0$ existe tal N que con $n > N$ y p cualquiera se cumple la desigualdad

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leqslant |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \\ < 2\varepsilon, \quad \forall x \in E,$$

es decir, se cumple la tercera definición. Por otra parte, supongamos que se cumplen todas las condiciones de la tercera definición; entonces, para todo valor separado de $x \in E$ se cumple, evidentemente, el criterio corriente de Cauchy de convergencia de la sucesión, por lo cual ella converge hacia cierta función $f(x)$. Prefijemos ahora $\varepsilon > 0$ y elijamos N de una manera empleada en la tercera definición. En la desigualdad (4), donde $n > N$ es fijo, pasemos al límite para $p \to \infty$; obtenemos por resultado $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$ ($x \in E$), de donde

$$\rho_n = \sup_{x \in E} |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon,$$

y, como $n > N$ puede elegirse cualquiera, entonces $\rho_n \to 0$ ($n \to \infty$), es decir, queda cumplida la primera definición.

Expondremos en un sistema cartesiano de coordenadas la gráfica de una función $y = f(x)$ (función límite), la cual consideramos continua en el segmento $[a, b]$ (fig. 105). Prefijemos $\varepsilon > 0$ y determinemos una ε-franja de espesor 2ε que contiene en sí la gráfica. Un punto arbitrario de la ε-franja con la abscisa $x \in [a, b]$ tiene la ordenada y que satisface las desigualdades

$$f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon.$$

Si la sucesión de funciones $\{f_n(x)\}$ tiende a $f(x)$ uniformemente en $[a, b]$, entonces partiendo de $\varepsilon > 0$ prefijado, podemos indicar tal N que para cualquier $n > N$ la gráfica de $y = f_n(x)$ resulte dentro de la ε-franja. Si, en cambio, $f_n(x)$ tiende a $f(x)$ de una manera no uniforme en $[a, b]$, entonces, aunque para cada valor de x la sucesión $f_n(x)$ tiende hacia $f(x)$, no es posible, sin embargo indicar, $\forall \varepsilon > 0$, tal N que para cada $n > N$ todas las gráficas $y = f_n(x)$ queden dentro de la ε-franja (véase más abajo el ejemplo 3).

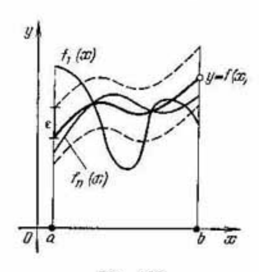


Fig. 105

No es difícil ver que si α es un número, y $\{f_k(x)\}$, $\{\varphi_k(x)\}$ son dos sucesiones de funciones, convergentes uniformemente en E, entonces las sucesiones $\{\alpha f_k(x)\}$ y $\{f_k(x) \pm \varphi_k(x)\}$ convergen también uniformemente en E. Tampoco es difícil ver que si una sucesión de funciones es uniformemente convergente en E, será también uniformemente convergente en $E' \subset E$. La afirmación inversa no es, en el caso general, cierta.

Indiquemos que a toda sucesión de funciones $\{f_k(x)\}$ le corresponde una serie

$$f_0(x) + [f_1(x) - f_0(x)] + [f_2(x) - f_1(x)] + \dots,$$

cuyas *n-ésimas* sumas parciales son iguales a $f_n(x)$, respectivamente.

Ahora, sea dada una serie

$$u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots, \tag{5}$$

cuyos términos son, en general, funciones complejas de $x \in E$, donde E es, como antes, un cierto conjunto de puntos de un espacio *n-dimensional* o de un plano complejo.

Por definición, la *serie* (5) *converge uniformemente en el conjunto E hacia la función $S(x)$*, si la sucesión $\{S_k(x)\}$ de sus sumas parciales converge uniformemente en E hacia $S(x)$.

En particular, la definición de convergencia uniforme de la serie puede, evidentemente, enunciarse del modo siguiente: la serie (5) converge uniformemente en el conjunto E, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un N tal que para $n > N$ y $p > 0$ se verifica la desigualdad

$$|u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon,$$

cualquiera que sea $x \in E$.

El teorema que sigue proporciona un criterio importante para la convergencia uniforme de una serie

TEOREMA 1 (DE WEIERSTRASS). *Si los términos de la serie* (5) *satisfacen las desigualdades*

$$|u_k(x)| \leqslant \alpha_k \quad (k = 0, 1, \ldots) \tag{6}$$

donde $x \in E$, *y* α_k *son unos números (que no dependen de* x*), y si una serie formada de los términos* α_k, *converge, entonces la serie* (5) *converge en el conjunto* E *absoluta y uniformemente.*

En efecto, la convergencia de una serie formada por los términos α_k y las desigualdades (6) nos hacen concluir que para todo $\varepsilon > 0$ se encontrará un N tal que, siendo $n > N$ y $p > 0$ cualesquiera y $x \in E$ arbitrario, tenemos

$$\varepsilon > \alpha_{n+1} + \ldots + \alpha_{n+p} \geqslant$$
$$\geqslant |u_{n+1}(x)| + \ldots + |u_{n+p}(x)| \geqslant |u_{n+1}(x) + \ldots$$
$$\ldots + u_{n+p}(x)|,$$

y esto significa precisamente que la serie (5) es uniformemente convergente en E. Su convergencia absoluta es evidente.

TEOREMA 2. *Si una sucesión de funciones* $\{f_n(x)\}$ *converge uniformemente en un conjunto* E *hacia la función* f *y si* f_n *son continuas en un punto* x^0 *(respecto de* E*), entonces* f *será también continua en* x^0.

En el lenguaje de las series este teorema dice: *la suma de una serie (uniformemente convergente en* E*) de funciones continuas en el punto* $x^0 \in E$ *es una función continua en el punto citado*[1]).

Demostración. Prefijemos $\varepsilon > 0$ y elijamos un N natural de modo tal que sea $|f(x) - f_N(x)| < \varepsilon/3$ para cualquier $x \in E$, lo que es factible debido a la convergencia uniforme de f_n hacia f. Tenemos:

$$|f(x) - f(x^0)| \leqslant |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(x^0)| +$$
$$+ |f_N(x^0) - f(x^0)| < 2\frac{\varepsilon}{3} + |f_N(x) - f_N(x^0)| \tag{7}$$

para cualquier punto $x \in E$. Pero la función f_N es continua en x^0 y se puede indicar tal $\delta > 0$ que $|f_N(x) - f_N(x^0)| < \varepsilon/3$ para to-

[1]) Véase la observación en el § 9.12.

dos los $x \in E$ tales que $|x - x^0| < \delta$; por eso, de (7) se deduce que para tales x se verifica

$$|f(x) - f(x^0)| < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

y el teorema queda demostrado.

EJEMPLO 1. Una serie

$$1 + (x - 1) + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \ldots \tag{8}$$

converge en el segmento $[0, 1]$, pero no uniformemente. En el segmento $[0, q]$, donde $0 < q < 1$, la serie converge uniformemente.

En efecto, la *n-ésima* suma parcial de la serie (8)

$$S_n(x) = x^n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

El valor absoluto de la diferencia $S(x) - S_n(x)$ (del resto de la serie) es

$$|S(x) - S_n(x)| \begin{cases} x^n, & 0 \leqslant x < 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases} \tag{9}$$

En el segmento $[0, q]$, donde $0 < q < 1$,

$$|S(x) - S_n(x)| = x^n \leqslant q^n.$$

El segundo miembro de esta desigualdad no depende de $x \in [0, q]$ y tiende a cero cuando $n \to \infty$ $(q^n \to 0)$. Esto muestra que la serie (8) converge uniformemente en el segmento $[0, q]$, donde $0 < q < 1$.

Por otra parte, de la igualdad (9) se ve que

$$\sup_{x \in [0, 1]} |S(x) - S_n(x)| = 1.$$

De este modo, el número 1 es mínimo de los que sobrepasan $|S(x) - S_n(x)|$ para todo $x \in [0, 1]$. Pero el número constante 1 no tiende a cero cuando $n \to \infty$, por lo cual la serie (8) converge en $[0, 1]$ del modo no uniforme.

EJEMPLO 2. Una serie

$$\frac{\operatorname{sen} x}{1^2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2^2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3^2} + \ldots \tag{10}$$

cuenta con el *n-ésimo* término que satisface la desigualdad

$$\frac{|\operatorname{sen} nx|}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2} \quad \forall x \in (-\infty, \infty),$$

con la particularidad de que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

converge. Por eso, de acuerdo con el teorema de Weierstrass, la serie (10) converge uniformemente en todo el eje $(-\infty, \infty)$.

Como los términos de la serie (10) son todos funciones continuas, entonces, en vista del teorema 2, la suma de esta serie es una función continua.

EJEMPLO 3. En la fig. 106 está expuesta la función $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Es lineal en cada uno de los segmentos $[0, 1/n]$, $[1/n, 2/n]$, $[2/n, 1]$ por separado. Además, $f_n(0) = f(2/n) = 0$, y $f_n(x) = 0$ en $[2/n, 1]$, $f_n(1/n) = 1$.

Evidentemente,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = 0, \quad \forall x \in [0, 1],$$

puesto que $f_n(0) = 0 \to 0$, y si $0 < x \leqslant 1$, entonces $f_n(x) = 0$, $\forall n > 2/x$.

Luego, es obvio que

$$\sup_{x\in[0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0, 1]} f_n(x) = 1,$$

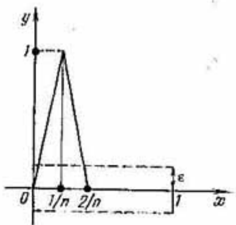


Fig. 106

y que el número constante 1 no tiende a cero cuando $n \to \infty$, es decir, $f_n(x) \to f(x) \equiv 0$ en $[0, 1]$, pero de manera no uniforme.

En la fig. 106 viene expresada por una línea a trazos la ε-franja que entraña la curva límite $f(x) = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$. Cualquiera que sea n, la gráfica de la función $f_n(x)$ no cabe por entero en la ε-franja. Esto no impide que $f_n(x) \to f(x) = 0$, $\forall x \in [0, 1]$.

Demos a conocer los criterios más finos de convergencia uniforme de las series, los cuales se basan en la aplicación a la serie de la así llamada transformación de Abel (que representa un análogo de la operación de integración por partes).

Examinemos una serie

$$\alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots \tag{11}$$

donde α_k, β_k son las funciones de $x \in E$ (o bien los números constantes). Pongamos $B_k = \beta_{n+1} + \beta_{n+2} + \ldots + \beta_{n+k}$ y apliquemos la transformación de Abel a la suma truncada de la serie (11):

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_{n+k}\beta_{n+k} = \alpha_{n+1}\beta_{n+1} + \ldots + \alpha_{n+p}\beta_{n+p} =$$

$$= \alpha_{n+1}B_1 + \alpha_{n+2}(B_2 - B_1) + \ldots + \alpha_{n+p}(B_p - B_{p-1}) =$$

$$= (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2})B_1 + (\alpha_{n+2} - \alpha_{n+3})B_2 + \ldots + (\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p})B_{p-1} + \alpha_{n+p}B_p =$$

$$= \sum_{k=1}^{p-1} (\alpha_{n+k} - \alpha_{n+k+1})B_k + \alpha_{n+p}B_p. \tag{12}$$

Ahora es fácil establecer los siguientes dos criterios para la convergencia uniforme (la convergencia simple en el caso en que α_k, β_k son constantes) de la serie (11).

TEOREMA 3 (CRITERIO DE DIRICHLET DE CONVERGENCIA UNIFORME DE UNA SERIE). *Si las sumas parciales de una serie*

$$\beta_0+\beta_1+\beta_2+\ldots \tag{13}$$

están acotadas en su conjunto, y la función real $\alpha_k(x)$ (al crecer k) tiende uniformemente (respecto de x) en E a cero, siempre decreciendo, entonces la serie (11) converge uniformemente.

Efectivamente, supongamos que una constante M sobrepasa los módulos de las sumas parciales σ_n de la serie (13). Entonces, para cualesquiera n y k,

$$|B_k|=|\sigma_{n+k}-\sigma_n|\leqslant|\sigma_{n+k}|+|\sigma_n|\leqslant 2M.$$

Por eso, en vista de (12) y teniendo presente el hecho de que α_s tiende uniformemente a cero decreciendo, se verifica la desigualdad

$$\left|\sum_1^p \alpha_{n+k}\beta_{n+k}\right|\leqslant 2M\sum_{k=1}^{p-1}(\alpha_{n+k}-\alpha_{n+k+1})+\alpha_{n+p}2M=2M\alpha_{n+1}<\varepsilon$$

para cualesquiera $n>N$ y p, y para todo $x\in E$, siempre que N es suficientemente grande. Por consiguiente, la serie (11) converge uniformemente. La última igualdad en esta cadena se verifica para todo $x\in E$, puesto que $\alpha_{n+1}(x)$ tiende a cero uniformemente.

TEOREMA 4 (CRITERIO DE ABEL DE CONVERGENCIA UNIFORME DE UNA SERIE). *Si las funciones reales α_k decrecen monótonamente (al crecer k) y están acotadas en su conjunto y si la serie (13) converge uniformemente en E, entonces la serie (11) también converge uniformemente en E.*

Efectivamente, sea $M\geqslant|\alpha_k|$ $(k=0, 1, \ldots)$ (las funciones α_k pueden ser también negativas). Como la serie (13) converge uniformemente, se puede indicar para cualquier $\varepsilon>0$ tal N que $|B_k|<\varepsilon$ para cualesquiera $n>N$ y k. Por lo tanto, en virtud de (12) y teniendo presente la monotonía de α_s, para cualesquiera $n>N$ y p tiene lugar

$$\left|\sum_1^p \alpha_{n+k}\beta_{n+k}\right|\leqslant\varepsilon\sum_{k=1}^{p-1}(\alpha_{n+k}-\alpha_{n+k+1})+\varepsilon|\alpha_{n+p}|=$$

$$=\varepsilon(\alpha_{n+1}-\alpha_{n+p})+\varepsilon|\alpha_{n+p}|\leqslant 3\varepsilon M,$$

es decir, la serie (11) converge uniformemente.

EJEMPLO 4. Las series

$$\sum_1^\infty\frac{\cos kx}{k^\alpha},\quad\sum_1^\infty\frac{\operatorname{sen} kx}{k^\alpha}\quad(\alpha>0) \tag{14}$$

son, para $\alpha>1$, uniforme y absolutamente convergentes en todo el eje real $(-\infty<x<\infty)$, puesto que los valores absolutos de sus k-*ésimos* términos no sobrepasan $k^{-\alpha}$, y, cuando $\alpha>1$, la serie $\sum k^{-\alpha}$ converge. En estos razonamientos hemos recurrido al criterio de Weierstrass. Para $\alpha\leqslant 1$ dicho criterio ya no es válido, pues, en este caso la serie $\sum k^{-\alpha}$ diverge. No obstante, cuando $0<\alpha\leqslant 1$, nuestras series convergen uniformemente en el segmento $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$ cualquiera que sea $\varepsilon>0$, donde $0<\varepsilon<2\pi-\varepsilon<2\pi$. En efecto, las sumas parciales de las series

$$\frac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\ldots,\ \operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 2x+\ldots$$

son iguales a

$$D_n(x)=\frac{\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}},\quad K_n(x)=$$

$$=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}\quad (n=1,\ 2,\ \ldots),\qquad (15)$$

respectivamente.

Podemos cerciorarnos de esto, si multiplicamos y dividimos por 2 sen $(x/2)$ las sumas parciales de las series en consideración y realizamos en el numerador las correspondientes transformaciones trigonométricas. Las funciones (15) están acotadas en su conjunto en $[\varepsilon,\ 2\pi-\varepsilon]$.

$$|D_n(x)|\leqslant\frac{1}{2\operatorname{sen}(\varepsilon/2)},\quad |K_n(x)|\leqslant\frac{1}{\operatorname{sen}(\varepsilon/2)}\quad (n=1,\ 2,\ \ldots);$$

además, $n^{-\alpha}\geqslant(n+1)^{-\alpha}$ y $n^{-\alpha}\to 0$, por lo cual, de conformidad con el criterio de Dirichlet, las series (14) son uniformemente convergentes en $[\varepsilon,\ 2\pi-\varepsilon]$

§ 9.9. Integración y diferenciación de las series uniformemente convergentes

TEOREMA 1. *Supongamos que en un segmento* $[a,\ b]$ *viene dada una sucesión* $\{f_n(x)\}$ *de funciones continuas (de valores complejos) la que converge hacia la función* f. *Si la convergencia es uniforme en* $[a,\ b]$, *entonces*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n(t)\,dt=\int_a^x f(t)\,dt \qquad (1)$$

uniformemente en $[a,\ b]$. *En particular (para* $x=b$*)*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)\,dt=\int_a^b f(t)\,dt. \qquad (2)$$

Demostración. De la hipótesis del teorema se deduce (véase el § 9.8, teorema 2) que la función límite f es continua en $[a,\ b]$ y

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b}|f_n(t)-f(t)|=r_n\to 0\quad (n\to\infty).$$

Por lo tanto

$$\left|\int_a^x f_n(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt\right|\leqslant\int_a^x|f_n(t)-f(t)|\,dt\leqslant\int_a^b r_n\,dt=(b-a)\,r_n,$$

donde el miembro derecho no depende de x y tiende a cero cuando $n \to \infty$, lo que demuestra el teorema.

TEOREMA 2. *Una serie de funciones continuas (de valores complejos)*

$$S(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \ldots, \tag{3}$$

convergente uniformemente en el segmento $[a, b]$, puede integrarse término por término $(a \leqslant x_0 \leqslant b)$:

$$\int_{x_0}^{x} S(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} u_0(t)\,dt + \int_{x_0}^{x} u_1(t)\,dt + \ldots . \tag{4}$$

La serie obtenida (4) *converge uniformemente en* $[a, b]$.

En particular

$$\int_{a}^{b} S(t)\,dt = \int_{a}^{b} u_0(t)\,dt + \int_{a}^{b} u_1(t)\,dt + \ldots . \tag{5}$$

Demostración. Observemos que $S(x)$ es una función continua en $[a, b]$, puesto que representa una suma de la serie de funciones continuas que converge uniformemente en el segmento $[a, b]$. Sea

$$S_n(x) = \sum_{0}^{n} u_k(x).$$

Como la serie (3) converge uniformemente hacia $S(x)$, resulta

$$\sup_{a \leqslant x \leqslant b} |S_n(x) - S(x)| = r_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Por ello,

$$\left| \int_{x_0}^{x} S(t)\,dt - \sum_{0}^{n} \int_{x_0}^{x} u_k(t)\,dt \right| = \left| \int_{x_0}^{x} S(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} S_n(t)\,dt \right| =$$

$$= \left| \int_{x_0}^{x} [S(t) - S_n(t)]\,dt \right| \leqslant \int_{a}^{b} |S(t) - S_n(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant (b-a)\,r_n \to 0 \quad (n \to \infty),$$

y el teorema queda demostrado.

TEOREMA 3. *Supongamos que en el segmento $[a, b]$ viene dada una serie de funciones (de valores complejos)*

$$u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \ldots \tag{6}$$

las cuales disponen de una derivada continua.

Si la serie (6) *converge en cierto punto $x_0 \in [a, b]$ y, además, si converge uniformemente en $[a, b]$ una serie formalmente diferenciada*

$$u_0'(x) + u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots, \tag{7}$$

entonces la serie (6) *uniformemente converge en* $[a, b]$ *y la derivada de su suma* $S(x)$ *será la suma de la serie* (7).

De este modo,

$$S(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \ldots, \tag{8}$$

$$S'(x) = u_0'(x) + u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots \quad (a \leqslant x \leqslant b). \tag{9}$$

Demostración. Por hipótesis la serie (7) converge uniformemente en $[a, b]$ y sus términos son funciones continuas en $[a, b]$, razón por la cual su suma, la que se designará esta vez con $\varphi(x)$, será una función continua en $[a, b]$. En virtud del teorema 2, podemos integrar la serie (7) término por término y obtener la serie

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} u_0'(t)\,dt + \int_{x_0}^{x} u_1'(t)\,dt + \ldots (a \leqslant x \leqslant b),$$

que será uniformemente convergente en $[a, b]$.

Aplicando el teorema de Newton—Leibniz, tendremos

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt = \sum_{0}^{\infty} [u_k(x) - u_k(x_0)]. \tag{10}$$

La serie en el segundo miembro de (10), cuyos términos son iguales a las funciones entre corchetes, converge uniformemente en $[a, b]$, la serie $\sum_{0}^{\infty} u_k(x_0)$ converge por hipótesis, y, como sus términos son constantes, se debe considerarla como una serie uniformemente convergente en $[a, b]$; pero, en tal caso converge también y, además, uniformemente en $[a, b]$ la serie $\sum_{0}^{\infty} u_k(x)$, puesto que representa la diferencia entre dos series uniformemente convergentes; designemos su suma con $S(x)$. Entonces, la serie (10) puede anotarse así:

$$S(x) = S(x_0) + \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt.$$

No obstante la función $S(x)$ tiene una derivada igual a $S'(x) = \varphi(x)$, y por lo tanto el teorema está demostrado.

EJEMPLO 1. Una serie

$$S(x) = \frac{\cos x}{1^\alpha} + \frac{\cos 2x}{2^\alpha} + \frac{\cos 3x}{3^\alpha} + \ldots \tag{11}$$

converge uniformemente para $\alpha > 1$ en todo el eje real según el criterio de Weierstrass puesto que

$$|n^{-\alpha} \cos nx| \leqslant n^{-\alpha}, \quad \forall x \in (-\infty, \infty)$$

y

$$\sum_{1}^{\infty} n^{-\alpha} < \infty \quad (\alpha > 1).$$

Diferenciemos formalmente la serie (11):

$$\varphi(x) = \frac{-\operatorname{sen} x}{1^{\alpha-1}} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2^{\alpha-1}} - \frac{\operatorname{sen} 3x}{3^{\alpha-1}} - \ldots \tag{12}$$

Esta serie converge uniformemente en $(-\infty, \infty)$ ya para $\alpha > 2$. Pero, en este caso, para $\alpha > 2$,

$$S'(x) = \varphi(x). \tag{13}$$

Examinemos el caso en que $1 < \alpha \leqslant 2$. El criterio de Weierstrass no puede ser aplicado a la serie (12). Sin embargo, esta serie converge uniformemente en el segmento $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$ (véase el § 9.8, el ejemplo 4). En el segmento mencionado converge, además, la serie (11), por lo cual podemos afirmar, rigiéndonos por el teorema 3, que en el segmento $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$ tiene lugar la igualdad (13), por pequeño que sea $\varepsilon > 0$; por lo tanto, obviamente dicha igualdad se verifica también en el intervalo $(0, 2\pi)$.

Al tomar en consideración que los términos de la serie (11) son de período 2π, se ha demostrado, que para $1 < \alpha \leqslant 2$ resulta lícito diferenciar la serie (11) término por término, cualesquiera que sean los valores de $x \in (-\infty, \infty)$, a excepción de los puntos $x_k = 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

EJEMPLO 2. Supongamos que la función $f_n(x)$ es continua en $[0, 1]$, lineal en cada uno de los segmentos $[0, 1/2n]$ y $[1/2n, 1/n]$ y de tal índole que $f_n(0) = f(1/n) = 0$, $f_n(1/2n) = \alpha_n$, $f_n(x) \equiv 0$ en $[1/n, 1]$, donde α_n es cualquier sucesión de números (fig. 107). Entonces, evidentemente, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ para todo $x \in [0, 1]$, y

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^{1/2n} 2n\alpha_n x\,dx + \int_{1/2n}^{1/n} 2n\alpha_n\left(\frac{1}{n} - x\right)dx = \frac{\alpha_n}{2n}.$$

Luego, es obvio también que

$$r_n = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f_n(x) - 0| = \alpha_n,$$

por lo cual la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente cuando, y sólo cuando, $\alpha_n \to 0$. La igualdad

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx \to \int_0^1 f_n(x)\,dx \quad (f(x) \equiv 0) \tag{14}$$

se verifica cuando, y sólo cuando, $\alpha_n/2n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Vemos que la convergencia uniforme de f_n hacia $f = 0$ en $[0, 1]$ (es decir, cuando $\alpha_n \to 0$) implica la convergencia de las integrales (14), lo que concuerda con el teorema 2. Pero puede suceder que la sucesión $\{f_n\}$ converja de un modo no uniforme, mientras que la propiedad (14) se observa, por ejemplo, cuando $\alpha_n = 1$. Esto es indicio de que la convergencia uniforme de la sucesión es una condición suficiente, pero no necesaria para que una sucesión de integrales converja hacia una integral de la función límite. A continuación, cuando $\alpha_n = n$, no sólo es no uniforme la convergencia de la sucesión $\{f_n\}$, sino tampoco se observa la propiedad (14).

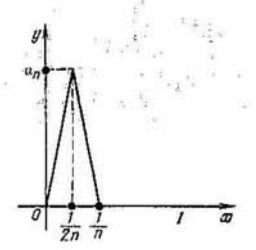


Fig. 107

De tal manera, si la convergencia de la sucesión $\{f_n\}$ no es uniforme, entonces resultan posibles dos casos: la sucesión de integrales $\int_a^b f_n(x)\,dx$ converge hacia una integral de la función límite $\int_a^b f(x)\,dx$, o bien converge hacia otro número (para $\alpha_n = n$ converge no hacia cero, sino hacia 1/2), o bien no converge en general.

EJEMPLO 3. De la igualdad $(1 - z)^{-1} = 1 + z + z^2 + \ldots$ $(z = \rho e^{i\theta}, \rho < 1)$ se deduce que

$$\frac{1+\rho e^{i\theta}}{2(1-\rho e^{i\theta})} = \frac{1}{2} + \rho e^{i\theta} + \rho^2 e^{i2\theta} + \ldots,$$

y separando las partes real e imaginaria, obtendremos

$$P(\rho, \theta) = \frac{1}{2}\,\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2} = \frac{1}{2} + \rho\cos\theta + \rho^2\cos 2\theta + \ldots, \tag{15}$$

$$Q(\rho, \theta) = \frac{\rho\,\mathrm{sen}\,\theta}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2} = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta + \rho^2\,\mathrm{sen}\,2\theta + \ldots \,. \tag{16}$$

La función $P(\rho, \theta)$ recibe el nombre de *núcleo de Poisson*[1]), y la $Q(\rho, \theta)$, *función conjugada del núcleo*.

Dichas funciones son armónicas (para $\rho < 1$), es decir, satisfacen la ecuación diferencial de Laplace[2]) en coordenadas polares

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0. \tag{17}$$

[1]) Poisson S. D. (1781—1840), un matemático y físico francés.
[2]) Laplace P. S. (1749—1827), un matemático y físico francés.

En efecto, todo término de la serie (15) es una función armónica $(\rho^n \cos n\theta)'_\rho = n\rho^{n-1} \cos n\theta$, $(\rho^n \cos n\theta)''_\rho =$

$$= n(n-1)\rho^{n-2} \cos n\theta, \quad (\rho^n \cos n\theta)''_\theta = -n^2\rho^n \cos n\theta,$$

$$\Delta(\rho^n \cos n\theta) = \rho^{n-2} \cos n\theta\,[n(n-1) + n - n^2] = 0.$$

Análogamente, $\Delta(\rho^n \operatorname{sen} n\theta) = 0$.

La legitimidad de la diferenciación término por término de las series (15) y (16) está estipulada por lo que dichas series y las series derivadas (una o dos veces) formalmente convergen uniformemente para $0 \leqslant \rho \leqslant \rho_0 < 1$, donde ρ_0 es cualquier número positivo inferior a la unidad.

Ha de notarse que la función $u(x, y)$, donde x e y son las coordenadas polares, se denomina función *armónica en el dominio* Ω de puntos (x, y), si satisface en dicho dominio una ecuación diferencial

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

En las coordenadas polares esta ecuación se expresa en forma de (17).

§ 9.10. Multiplicación de las series absolutamente convergentes

Veamos dos series absolutamente convergentes

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} u_k, \quad \sigma = \sum_{l=0}^{\infty} v_l \tag{1}$$

de términos reales o complejos. Numeremos los pares (k, l), donde $k = 0, 1, 2, \ldots, l = 0, 1, 2, \ldots$, de tal o cual modo

$$(k_1, l_1), (k_2, l_2), (k_3, l_3), \ldots . \tag{2}$$

Aquí es importante que cada par mencionado (k, l) figura en la sucesión (2) a título de su término una sola vez y tiene en la misma un número determinado. Demostremos que

$$S\sigma = \sum_{i=0}^{\infty} u_{k_i} v_{l_i}, \tag{3}$$

y la serie en el segundo miembro de (3) es absolutamente convergente.

Así pues, si formamos una serie de toda clase de productos $u_k v_l$, que se toman en cualquier orden, esta serie converge absolutamente y tiene una suma igual a $S\sigma$.

Con el fin de demostrar dicha afirmación, formemos las series de los módulos $|u_k|$ y $|v_l|$:

$$\overline{S} = \sum_{k=0}^{\infty} |u_k|, \quad \overline{\sigma} = \sum_{l=0}^{\infty} |v_k|. \tag{1'}$$

Pongamos

$$\overline{S}_N = \sum_{k=0}^{N} |u_k|, \quad \overline{\sigma}_N = \sum_{l=0}^{N} |v_l|.$$

Primero ordenemos los pares (k, l) del modo siguiente (fig. 108): (0, 0), (0, 1) (1, 1), (1, 0), (0, 2) (1, 2), (2, 2), (2, 1), (2, 0), . . ., entonces

$$\overline{S\sigma} = \lim_{N\to\infty} \overline{S}_N \lim_{N\to\infty} \overline{\sigma}_N = \lim_{N\to\infty} (\overline{S}_N \cdot \overline{\sigma}_N) =$$
$$= \lim_{N\to\infty} (|u_0|\cdot|v_0| + |u_0|\cdot|v_1| + |u_1|\cdot|v_1| +$$
$$+ |u_1|\cdot|v_0| + |u_0|\cdot|v_2| + |u_1|\cdot|v_2| + |u_2|\cdot|v_2| + |u_2|\cdot|v_1| +$$
$$+ |u_2|\cdot|v_0| + \ldots + |u_N|\cdot|v_0|). \quad (4')$$

Esto muestra que la suma en el segundo miembro tiende, para $N \to \infty$ a un límite igual a $\overline{S\sigma}$, y como sus términos son no negativos, entonces el número $\overline{S\sigma}$ es la suma de la serie

$$\overline{S\sigma} = |u_0|\cdot|v_0| + |u_0|\cdot|v_1| + |u_1|\cdot|v_1| + \ldots. \quad (5')$$

Por cuanto los términos de esta serie no son negativos, pueden permutarse de un modo sumamente arbitrario sin que se alteren la convergencia y la suma $\overline{S\sigma}$ de la serie.

Hemos demostrado nuestra afirmación esta vez para las series (1').

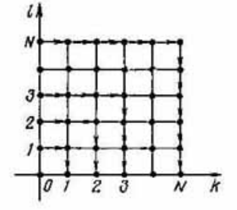


Fig. 108

Sea ahora

$$S_N = \sum_{k=0}^{N} u_k, \quad \sigma_N = \sum_{l=0}^{N} v_l.$$

Al igual que en (4'), por ser convergentes las series (1), tendremos

$$S\sigma = \lim_{N\to\infty} (S_N\sigma_N) =$$
$$= \lim_{N\to\infty} (u_0v_0 + u_0v_1 + u_1v_1 + u_1v_0 + \ldots + u_Nv_0). \quad (4)$$

De este modo, en (4) a la derecha existe, para $N \to \infty$, un límite igual a $S\sigma$. Pero ya se ha demostrado que la serie (5') converge. Esto deja constancia de que la serie

$$u_0v_0 + u_0v_1 + u_1v_1 + u_1v_0 + \ldots \quad (5)$$

también converge y, además, absolutamente.

En virtud de (4), la suma de esta serie es igual a $S\sigma$:

$$S\sigma = u_0v_0 + u_0v_1 + u_1v_1 + u_1v_0 + \ldots.$$

Por consiguiente, hemos demostrado la igualdad (3) para un modo determinado de numeración de los pares (k, l). Debido a la convergencia absoluta de la serie (5), la igualdad (3) quedará vigente para cualquier otro modo de numerar los pares.

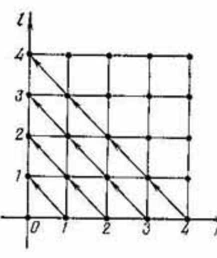


Fig. 109

EJEMPLO. Una serie

$$\psi(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots \qquad (6)$$

es absolutamente convergente para cualquier valor complejo de z, o bien, como se dice, converge absolutamente en todo el plano complejo. De esto es fácil convencerse, aplicando el criterio de d'Alembert a la serie con el término general $|z|^n/n!$.

Para cualesquiera dos números complejos u y v tenemos (las explicaciones vienen más abajo)

$$\psi(u)\psi(v) = \left(1 + u + \frac{u^2}{2!} + \ldots\right)\left(1 + v + \frac{v^2}{2!} + \ldots\right) =$$

$$= 1 + u + v + \frac{u^2}{2!}1 + u\cdot v + 1\frac{v^2}{2!} + \frac{u^3}{3!}\cdot 1 + \frac{u^2}{2!}v +$$

$$+ u\frac{v^2}{2!} + 1\cdot\frac{v^3}{3!} + \ldots = 1 + (u+v) + \frac{1}{2!}(u^2 + 2uv + v^2) +$$

$$+ \frac{1}{3!}(u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3) + \ldots = 1 + (u+v) +$$

$$+ \frac{(u+v)^2}{2!} + \frac{(u+v)^3}{3!} + \ldots = \psi(u+v). \qquad (7)$$

En la segunda igualdad los productos $\frac{u^k}{k!}\frac{v^l}{l!}$ se han dispuesto en el orden que se expone en la fig. 109 y se ha empleado la igualdad (3) para las series absolutamente convergentes. Una serie obtenida converge absolutamente, lo que fue demostrado en el caso general. Los grupos separados de términos de una serie convergente pueden lícitamente reunirse en paréntesis sin que se perturbe la convergencia de la serie. Precisamente esto se ha hecho en las igualdades ulteriores.

Hemos demostrado una igualdad de importancia

$$\psi(u + v) = \psi(u)\cdot\psi(v) \qquad (8)$$

para cualesquiera u y v complejos. Esta igualdad se tratará, en adición, en el § 9.13.

§ 9.11. Series de potencias

Una serie del tipo

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots, \qquad (1)$$

donde a_k son unos números constantes, y z es una variable, se denomina *serie de potencias*. Consideramos que a_k y z son complejos y sólo en algunos casos recurriremos a un dominio de una variable real. La letra z significará, en el caso general, un número variable complejo (un punto del plano complejo) y la letra x, un número variable real (un punto del eje real x).

En la teoría de las series de potencias el siguiente teorema fundamental es de mayor importancia.

TEOREMA 1 (FUNDAMENTAL). *Para la serie de potencias* (1) *existe un número no negativo R, finito o infinito* ($0 \leqslant R \leqslant \infty$), *que posee las siguientes propiedades*:

1) *La serie converge, y además, absolutamente, en un círculo abierto del plano complejo $|z| < R$, y diverge en los puntos z con $|z| > R$.*

2) *El número R se determina según la fórmula*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}, \qquad (2)$$

donde en el denominador figura el límite superior (véase el § 2.10).

Nos permitimos en este caso considerar que

$$\frac{1}{0} = \infty, \quad \frac{1}{\infty} = 0.$$

De tal manera, si el límite superior citado es igual a 0, entonces $R = \infty$, si, en cambio, dicho límite es igual a ∞, entonces $R = 0$.

El círculo abierto $|z| < R$ se denomina *círculo de convergencia de la serie de potencias*. Cuando $R = \infty$, dicho círculo se convierte en todo el plano complejo. Cuando $R = 0$, la serie de potencias tiene un solo punto de convergencia, a saber, el punto $z = 0$; R se denomina *radio de convergencia de la serie* (1).

Observación 1. El número R, que satisface la afirmación 1) del teorema 1, es, obviamente, único.

Observación 2. Si para la serie de potencias (1) existe un límite corriente $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, será igual al límite superior $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$. Por eso

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Un lector que no está familiarizado con el concepto de límite superior puede seguir la demostración del teorema 1 suponiendo que

el límite mencionado existe para la serie de potencias en consideración. En este caso, en todos los razonamientos que vienen abajo se debe sustituir $\overline{\lim}$ por lím.

Demostración del teorema 1. Supongamos que el número R se determina según la fórmula (2). En el punto $z = 0$ la serie de potencias converge. Consideraremos, además, que $|z| > 0$. A la par con la serie (1) introduzcamos la segunda serie, formada de los módulos de la primera:

$$|a_0| + |a_1 z| + |a_2 z^2| + \ldots. \tag{1'}$$

Designemos el término general de la serie (1') mediante

$$u_n = |a_n z^n| \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Según el criterio generalizado de Cauchy para la convergencia de una serie (véase el § 9.4, el teorema 3, (c)),

si $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{u_n} < 1$, entonces la serie (1') converge,

si $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{u_n} > 1$, entonces la serie (1') diverge,

con la particularidad de que la variable $\sqrt[n]{u_n}$ no está acotada, pero

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{u_n} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \overline{\lim} \left(|z| \sqrt[n]{|a_n|}\right) = |z| \, \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|z|}{R}.$$

Hemos sacado aquí fuera del signo de límite superior el número finito $|z| > 0$.

De lo dicho proviene: si $|z| < R$, es decir, si $|z|/R < 1$, entonces la serie (1') converge, y junto con ésta converge, y, además, absolutamente, la serie (1): si, en cambio, $|z| > R$, es decir, si $|z|/R > 1$, entonces la serie (1') diverge y su término general $|a_n z^n|$ no está acotado, razón por la cual el término general de la serie (1) $a_n z^n$ no tiende a cero cuando $n \to \infty$, y para él no se cumple la condición necesaria (véase el § 9.1). Esto es indicio de que la serie (1) diverge.

Hemos demostrado, pues, que el número R, determinado de la igualdad (2), posee la siguiente propiedad:

si $|z| < R$, la serie (1) es convergente, y, además, absolutamente,

si, en cambio, $|z| > R$, la serie (1) es divergente.

El teorema fundamental queda demostrado.

En lo que sigue designaremos, para abreviar, con σ_q un círculo cerrado $|z| \leqslant q$ del plano complejo.

Observemos que en el caso general la convergencia de la serie de potencias en un círculo abierto $|z| < R$ no es uniforme. No obstante, es válido el siguiente teorema.

TEOREMA 2. *La serie de potencias* (1) *converge absoluta y uniformemente en cualquier círculo* $\sigma_q = \{z: |z| \leqslant q\}$, *donde* $q < R$, *y* R *es el radio de convergencia de la serie* (1).

Demostración. En efecto, sea $q < R$. Entonces q es real, esto es, un punto del eje x, perteneciente al círculo abierto de convergencia de la serie (1). Por eso, en este punto nuestra serie de potencias converge absolutamente, es decir,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n q^n| < \infty.$$

Por otra parte, para $z \in \sigma_q$ tenemos

$$|a_n z^n| \leqslant |a_n q^n| \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Los segundos miembros de estas desigualdades no dependen de $z \in \sigma_q$ y la serie formada de los segundos miembros es convergente, por lo cual, de conformidad con el criterio de Weierstrass (véase el § 9.8, el teorema 1), la serie de potencias (1) converge en σ_q absoluta y uniformemente.

TEOREMA 3. *La suma*

$$S(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

de una serie de potencias es una función continua en su círculo de convergencia $|z| < R$.

Efectivamente, los términos de nuestra serie son funciones continuas de z, y la propia serie converge uniformemente en el círculo σ_q, $q < R$. Por consiguiente, de acuerdo con el célebre teorema de la teoría de las series uniformemente convergentes (véase el § 9.8, el teorema 2), la suma de la serie $S(z)$ es una función continua en σ_q, y, entonces, en todo el círculo $|z| < R$, puesto que $q < R$ es arbitrario.

El radio de convergencia de una serie de potencias puede ser calculado según la fórmula (2), pero prácticamente resulta a menudo más conveniente aprovechar el criterio de d'Alembert.

Supongamos que existe un límite (finito o infinito)

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|, \tag{4}$$

el cual se designará por ahora mediante $1/R_1$. Entonces (véase (3)),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = |z| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|z|}{R_1}$$

y, según el criterio de d'Alembert (§ 9.4, el teorema 2), si $z < R_1$, entonces la serie (1'), converge y junto con ella converge también la serie (1); en cambio, si $|z| > R_1$, entonces $|u_n| \to \infty$ y la serie (1)

diverge. Mas el número R con estas propiedades puede ser solamente único, por lo cual $R_1 = R$ (véase el teorema 1).

Hemos demostrado, pues, que si existe el límite (4), será igual a $1/R$:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{R}, \tag{5}$$

donde R es el radio de convergencia de la serie de potencias (1).

Ha de ser notado que hemos demostrado con rodeos que si el límite (4) (finito o infinito) existe, será igual al límite superior $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Observación 3. La exposición de la teoría de las series de potencias empezamos habitualmente por el teorema de Abel el que se enuncia del modo siguiente:

TEOREMA DE ABEL. *Si la serie de potencias* (1) *converge en un punto* $z_0 \neq 0$ de un plano complejo, entonces converge absoluta y uniformemente en el círculo cerrado $|z| \leqslant q$, donde q es un número cualquiera que satisface las desigualdades $0 < q < |z_0|$.

Demostración. Este teorema es, de hecho, el corolario de los teoremas 1 y 2. En efecto, como z_0 es un punto de convergencia de la serie (1), entonces $|z_0|$ no puede ser mayor que R. Por lo tanto, $|z_0| \leqslant R$, $0 < q < |z_0| \leqslant R$, y $q < R$. Mas, en este caso, de acuerdo con el teorema 2, la serie de potencias (1) converge en el círculo $|z| \leqslant q$ absoluta y uniformemente.

EJEMPLOS.

$$1 + z + z^2 + \ldots, \tag{6}$$

$$1 + \frac{z}{1^\alpha} + \frac{z^2}{2^\alpha} + \frac{z^3}{3^\alpha} + \ldots \quad (\alpha > 0), \tag{7}$$

$$1 + z + 2!z^2 + 3!z^3 + \ldots. \tag{8}$$

Con ayuda de las fórmulas (2) ó (5) concluimos que el radio de convergencia de las series (6) y (7) es igual a 1; para la serie (8) dicho radio es igual a 0.

La suma de la serie (6) (una progresión geométrica) en el círculo abierto $|z| < 1$ es igual a $(1 - z)^{-1}$, y el resto es

$$r_n(z) + \sum_{n+1}^{\infty} z^k = \frac{z^{n+1}}{1-z} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Sin embargo, la convergencia en el círculo citado no es uniforme. El carácter no uniforme de la convergencia tiene lugar ya para $z = x$ positivos en el intervalo $0 < z < 1$: la desigualdad

$$\varepsilon > \frac{x^{n+1}}{1-x} \tag{9}$$

con cualquier n prefijado no puede ser satisfecha para todo x de los indicados.

En efecto, si tomamos x muy próximo a 1, el numerador en el segundo miembro será también próximo a 1, y el denominador será próximo a cero y, de este modo, la fracción en el segundo miembro de (9) puede hacerse mayor que ε.

La serie (7) converge uniformemente, para $\alpha > 1$, en el círculo cerrado $|z| \leqslant 1$ de su convergencia, puesto que para $|z| \leqslant 1$

$$|z^\alpha k^{-\alpha}| \leqslant k^{-\alpha} \text{ y } \Sigma k^{-\alpha} < \infty.$$

Si $\alpha = 1$, en el punto $z = 1$, dispuesto en la frontera del círculo de convergencia, la serie (7) diverge.

La serie (8) converge sólo en el punto $z = 0$.

§ 9.12. Diferenciación e integración de las series de potencias

TEOREMA 1. *Los radios de convergencia de la serie*

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \tag{1}$$

y de la serie

$$a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots, \tag{2}$$

obtenida de (1) *por diferenciación formal, coinciden.*

Observación. La definición de continuidad y de derivada de una función de la variable compleja $f(z)$ es la misma que en el caso de una función de la variable real. Se debe sólo tener en cuenta que el δ-entorno del punto z_0 es un círculo abierto de radio δ con centro en el punto z_0. Partiendo de esta definición, la derivada de una función potencial z^n se calcula según la fórmula $(z^n)' = nz^{n-1}$.

Demostración del teorema 2. Convengamos en considerar que R es el radio de convergencia de la serie (1) y R', el radio de convergencia de la serie (2). Demostremos el teorema bajo el supuesto de que el límite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}, \tag{3}$$

sea finito o infinito, existe. Tenemos

$$\frac{1}{R'} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)\,a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_{n+1}} = 1 \cdot \frac{1}{R} = \frac{1}{R},$$

por consiguiente, $R = R'$.

En el caso general, cuando el límite (3) no existe, tiene lugar la igualdad

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{1}{R}$$

y entonces

$$\frac{1}{R'}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{n\,|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\ \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=1\cdot\frac{1}{R}=\frac{1}{R}.$$

Sin embargo, se requiere la argumentación de la segunda igualdad, es decir, es necesario demostrar que si $\alpha_n, \beta_n > 0$ y $\alpha_n \to 1$, entonces

$$\overline{\lim}\ (\alpha_n\beta_n)=\overline{\lim}\ \beta_n. \tag{4}$$

En efecto, existe una subsucesión $\{n_k\}$ tal que

$$\overline{\lim}\ \beta_n=\lim \beta_{n_k}=\lim \alpha_{n_k}\lim \beta_{n_k}=\lim\ (\alpha_{n_k}\beta_{n_k})\leqslant\overline{\lim}\ (\alpha_n\beta_n). \tag{5}$$

Existe también una subsucesión $\{n_k\}$ tal que

$$\overline{\lim}\ (\alpha_n\beta_n)=\lim\ (\alpha_{n_k}\beta_{n_k})=\frac{\lim\ (\alpha_{n_k}\beta_{n_k})}{\lim \alpha_{n_k}}=\lim \beta_{n_k}\leqslant\overline{\lim}\ \beta_n. \tag{6}$$

De (5) y de (6) se deduce (4).

TEOREMA 2. *Una serie de potencias*

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots \quad (|z|<R) \tag{7}$$

puede lícitamente diferenciarse dentro de los límites de su círculo (abierto) de convergencia $|z|<R$, *es decir, es válida la fórmula*

$$f'(z)=a_1+2a_2z+3a_3z^2+\ldots, \quad |z|<R. \tag{8}$$

Demostración. Este teorema sólo se demostrará bajo el supuesto de que $z=x$ es una variable real, lo que nos presta la posibilidad de reducir el problema a un hecho bien conocido por la teoría de las series reales.

Así pues, la serie de potencias (7) para una variable real tiene por expresión

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots, \quad -R<x<R. \tag{7'}$$

Esta serie tiene esta vez no el círculo, sino un intervalo de convergencia $(-R, R)$. Una serie correspondiente diferenciada formalmente tiene la forma

$$\varphi(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots \tag{8'}$$

La suma de ésta se ha designado, por ahora, mediante $\varphi(x)$. En virtud del teorema antecedente, esta serie converge en el intervalo $(-R, R)$. Como ya sabemos, ambas series convergen uniformemente en el segmento $[-q, q]$, donde $q<R$. Al mismo tiempo los términos de la segunda serie son continuos y representan las derivadas de los

términos respectivos de la primera serie. Pero, en estas condiciones, debido al teorema conocido de la teoría de series uniformemente convergentes (véase el § 9.9, el teorema 3), se verifica la igualdad

$$\varphi(x) = f'(x) \tag{9}$$

en el segmento $[-q, q]$, y, por lo tanto, en el intervalo $(-R, R)$, puesto que $q < R$ es arbitraria.

Observemos que en virtud del teorema demostrado 2, la serie (1) puede ser lícitamente diferenciada tantas veces como se quiera. En la k-ésima etapa obtendremos una igualdad

$$f^{(k)}(z) = k!a_k + (k+1)k \dots 2a_{k+1}z + \dots,$$

que es válida para todo z con $|z| < R$. Si ponemos en esta igualdad $z = 0$, obtendremos

$$f^{(k)}(0) = k!a_k$$

o bien

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

De aquí se infiere, en particular, que el *desarrollo de la función $f(z)$ en una serie de potencias* (véase (1)) *en cierto círculo $|z| < R$ (o en el intervalo $(-R < x < R)$, si se trata de una función $f(x)$ de la variable real x, es único.*

De este modo, la suma $f(z)$ de la serie de potencias (7), cuyo radio de convergencia $R > 0$, puede expresarse, además, del modo siguiente:

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k. \tag{10}$$

La serie en el segundo miembro de (10) se denomina *serie de Taylor de la función $f(z)$ en potencias de z.*

Hemos llegado a que *si la serie de potencias* (1) *cuenta con el radio de convergencia $R > 0$, será una serie de Taylor de su suma $f(z)$.*

La cuestión de integración término por término de las series de potencias en toda su plenitud requerería que sea introducida la integral curvilínea de una función de la variable compleja. Nos limitaremos a la consideración de esta cuestión sólo para las series de potencias

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots \tag{11}$$

de la variable real x $(z = x)$.

Prefijamos la serie de potencias (11) que cuenta con el intervalo de convergencia $(-R, R)$, donde $0 < R \leqslant \infty$. Los números a_k pueden ser tanto reales como complejos. Definamos un punto fijo $x_0 \in (-R, R)$ y un punto variable $x \in (-R, R)$, al elegir $q > 0$ de

un modo tal que sea

$$-R < -q < x_0, \quad x < q < R.$$

La serie de potencias (11) converge uniformemente en el segmento $[-q, q]$, que se halla estrictamente dentro del intervalo de convergencia de la serie, y, por ende, puede integrarse término a término (véase el § 9.9, el teorema 2) desde x_0 hasta x:

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = a_0(x - x_0) + \frac{a_1}{2}(x^2 - x_0^2) +$$

$$+ \frac{a_2}{3}(x^3 - x_0^3) + \ldots, \quad -R < x,\ x_0 < R. \qquad (12)$$

En particular, cuando $x_0 = 0$, obtenemos

$$\int_{0}^{x} f(t)\,dt = a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^2 + \ldots, \quad -R < x < R. \qquad (13)$$

EJEMPLO 1. Es evidente que

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \ldots.$$

Esta serie es convergente en el intervalo $(-1, 1)$ $(R = 1)$. Por esto, si $x \in (-1, 1)$, resulta lícita la integración término a término de esta serie desde cero hasta x (la serie es uniformemente convergente en cualquier segmento perteneciente al intervalo de convergencia):

$$\int_{0}^{x} \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \ (-1 < x < 1).$$

La serie obtenida converge incluso para $x = +1$ (como una serie de Leibniz). Se puede demostrar que ella converge hacia $\operatorname{arctg} 1 = \pi/4$, es decir,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots.$$

EJEMPLO 2. Una serie de Taylor para la función e^{-t^2} tiene por expresión (véase el § 4.16)

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \ldots,$$

con la particularidad de que para esta serie $R = \infty$. Por lo tanto, dicha serie puede integrarse término por término:

$$\int_{0}^{x} e^{-t^2}\,dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \ldots,$$

es decir, se ha obtenido una integral de Poisson expresada en términos de la serie de potencias.

EJEMPLO 3. Una serie de Taylor para la función $y = \text{sen}\, x$ tiene por expresión (véase el § 4.16)

$$\text{sen}\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots .$$

Dicha serie converge en todo el eje. De aquí, para $x \neq 0$, tenemos

$$\frac{\text{sen}\, x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots . \quad (14)$$

Considerando que $\left.\frac{\text{sen}\, x}{x}\right|_{x=0} = 1$, obtenemos la conclusión de que la igualdad (41) es cierta también para $x = 0$. La serie (14) converge uniformemente en cualquier intervalo finito del eje real. Integrando esta serie de potencias, obtenemos:

$$\int_0^x \frac{\text{sen}\, t}{t}\, dt = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \ldots .$$

EJEMPLO 4. Una serie de Taylor para la función $y = \cos x^2$ tiene por expresión (véase el § 4.16)

$$\cos x^2 = 1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{12}}{6!} + \ldots .$$

La serie converge en $(-\infty, \infty)$. Integrando esta serie de potencias, obtendremos la integral de Fresnel

$$\int_0^x \cos t^2\, dt = x - \frac{x^5}{5 \cdot 2!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} - \frac{x^{13}}{13 \cdot 6!} + \ldots .$$

EJEMPLO 5. Por cuanto

$$(\text{sh}\, x)^{(n)} = \begin{cases} \text{sh}\, x, & \text{si } n = 2k, \\ \text{ch}\, x, & \text{si } n = 2k+1, \end{cases}$$

entonces

$$(\text{sh}\, x)^{(n)}\,|_{x=0} = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 2k, \\ 1, & \text{si } n = 2k+1, \end{cases}$$

por lo cual la serie de Taylor para la función $\text{sh}\, x$ se anotará así:

$$\text{sh}\, x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots . \quad (15)$$

Puesto que esta serie de potencias converge en todo el eje real (aplíquese el criterio de d'Alembert), podemos diferenciarla término a

término:

$$\text{ch}\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \tag{16}$$

(la serie en el segundo miembro de (16) converge en cualquier intervalo finito).

§ 9.13. Funciones e^z, sen z, cos z de una variable compleja

Las funciones e^x, sen x, cos x de una variable real x están bien conocidas. Están definidas en todo el eje real ($-\infty < x < \infty$).

Por el § 4.16 sabemos que estas funciones se desarrollan en las series de potencias:

$$\left.\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, \\ \text{sen}\, x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots, \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Éstas son las series de Taylor de dichas funciones en potencias de x.

En el § 5.3 se ha dado la definición de la función e^{ix}, donde x es una variable real, por medio de la fórmula de Euler

$$e^{ix} = \cos x + i\, \text{sen}\, x. \tag{2}$$

En lugar de cos x y sen x en el segundo miembro de (2) sustituyamos sus series de potencias y obtendremos el desarrollo de e^{ix} en potencias de x

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right) = \\ = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \ldots.$$

La función e^z puede definirse naturalmente, para cualquier $z = x + iy$ complejo, del modo siguiente:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}.$$

De aquí

$$e^z = \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots\right)\left(1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \ldots\right) = \\ = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots.$$

Hemos empleado en la segunda igualdad una propiedad (multiplicación de las series absolutamente convergentes) que ya fue obtenida antes (véase el § 9.10, (7)).

Hemos llegado a que la función e^z de la variable compleja z se desarrolla en una serie de potencias en potencias de z

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots, \tag{3}$$

y esta serie converge en todo el plano complejo.

La serie (3) es, para la función e^z, una serie de Taylor en potencias de z.

El radio de convergencia de la serie (3) es $R = \infty$, y de las propiedades generales de las series de potencias se desprende (véase el § 9.10) que la serie (3) converge absolutamente para cualquier z compleja y, además, converge uniformemente (hacia e^z) en el círculo $|z| \leqslant q$, por grande que sea el número positivo q.

Las funciones cos z y sen z de la variable compleja z se determinan de un modo natural como sumas de las siguientes series de potencias:

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots,$$

$$\operatorname{sen} z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots.$$

Ambas series citadas tienen el radio de convergencia $R = \infty$, y, de este modo, las dos funciones correspondientes están definidas para cualquier z compleja.

Por comparación de las correspondientes series de potencias se comprueba con facilidad que

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \tag{4}$$

Ahora, haciendo uso de las propiedades de la función exponencial e^u (de u compleja), obtenemos fácilmente las fórmulas

$$\cos(u + v) = \cos u \cdot \cos v - \operatorname{sen} u \cdot \operatorname{sen} v,$$

$$\operatorname{sen}(u + v) = \operatorname{sen} u \cdot \cos v + \cos u \cdot \operatorname{sen} v,$$

que son válidas para cualesquiera u y v complejas.

Estas fórmulas, de tal forma, generalizan las fórmulas bien conocidas de la trigonometría, donde se consideraba que u y v eran variables reales. Cabe notar que las funciones sen z y cos z en un plano complejo no tienen todas las propiedades propias para las funciones sen x y cos x habituales. En particular, estas funciones no están acotadas en el plano complejo.

En virtud de (4), para x real tenemos

$$\cos ix = \frac{e^{-x}+e^{x}}{2} = \operatorname{ch} x \to \infty, \quad x \to \infty. \tag{5}$$

$$\operatorname{sen} ix = \frac{e^{-x}-e^{x}}{2i} = i \operatorname{sh} x \to \infty, \quad x \to \infty, \tag{6}$$

Las fórmulas (5) y (6) establecen de paso una relación entre la «trigonometría compleja» y la «hiperbólica».

La función $z = \ln w$ de una variable compleja w se define como función inversa de la función

$$w = e^{z}. \tag{7}$$

Si anotamos $w \neq 0$ en la forma exponencial

$$w = \rho e^{i\theta} \quad (\rho = |w| > 0),$$

la igualdad (7) se escribirá en la forma

$$\rho e^{i\theta} = e^{x}e^{iy} \quad (z = x + iy),$$

de donde

$$\rho = e^{x}, \quad \theta = y - 2k\pi,$$

es decir,

$$x = \ln \rho, \quad y = \theta + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Por lo tanto

$$z = \ln w = x + iy = \ln \rho + i(\theta + 2k\pi) = \ln |w| + \\ + i \operatorname{Arg} w = \ln |w| + i \arg w + i\, 2k\pi \\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{8}$$

donde $\ln |w|$ ($|w| > 0$) se entiende en el sentido habitual. De (8) se ve que $\ln w$ ($w \neq 0$) es una función multiforme de w junto con $\operatorname{Arg} w$, no importa que sea w: real o compleja.

Por ejemplo, desde el punto de vista de esta teoría (de las funciones de una variable compleja) $\ln 1$ es igual a uno de los números $2k\pi i$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). En el análisis real para la expresión de $\ln 1$ se elige entre dichos números un único número real 0.

No es nuestro deseo de profundizarnos más en la teoría de las funciones de una variable compleja (esto no es nuestro objetivo). Nos limitamos sólo a una observación con motivo de la fórmula

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \quad (-1 < x \leqslant 1),$$

que fue obtenida en el § 4.16 para x reales. Al sustituir x en el segundo miembro de la serie por z con

$$|z| < 1,$$

la serie quedará convergente. Podemos decir que su suma es igual a $\ln(1+z)$, donde el logaritmo se entiende en el sentido de la definición aducida más arriba, con mayor precisión, la suma es igual a una de las ramas uniformes de la función multiforme

$$\ln(1+z).$$

Las funciones de una variable compleja que se desarrollan en series de potencias (series de Taylor) se llaman *funciones analíticas*. Se estudian en el apartado de las matemáticas, llamado teoría de las funciones analíticas o teoría de las funciones de una variable compleja[1]).

Observemos por fin que si en una serie de potencias en potencias de u

$$a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \ldots,$$

cuyo radio de convergencia es $|u| < R$, ponemos $u = z - z_0$, donde z_0 es un número fijo (complejo, en el caso general), obtendremos una serie

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots,$$

llamada *serie de potencias en potencias de* $z - z_0$.

Dicha serie converge en el círculo (de convergencia) $|z - z_0| < R$, y diverge para z que satisfacen la desigualdad $|z - z_0| > R$.

§ 9.14. Series en los cálculos aproximados

En este párrafo nos preocuparemos del cálculo aproximado de los valores de las funciones elementales.

Una función elemental más simple es el polinomio

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n.$$

El cálculo de esta función para $x = x_0$ se reduce a la realización de un número finito de adiciones y multiplicaciones. El valor de la función citada en el punto x_0 puede hallarse fácilmente con cualquier grado de exactitud. Muy rápidamente esto puede lograrse, si se usa una máquina computadora.

Existen otras funciones elementales, como, por ejemplo, sen x, arctg x, . . ., las cuales, según lo demostrado anteriormente, se desarrollan en una serie de Taylor en potencias de x.

El error que se comete al cambiar las funciones (sumas de las series) por el polinomio de Taylor, podemos determinarlo estimando el término residual de la serie.

---

[1]) Véase nuestro libro «Ecuaciones diferenciales. Series. Integrales múltiples. Funciones de una variable compleja».

Veamos una serie de potencias

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots \quad (-R < x < R) \tag{1}$$

cuyo intervalo de convergencia es $(-R, R)$. Estrictamente dentro del intervalo de convergencia esta serie converge hacia $f(x)$ con la velocidad de una progresión geométrica decreciente.

En efecto, sean q_1 y q unos números arbitrarios que satisfacen las desigualdades $0 < q_1 < q < R$. Entonces, la serie (1) converge en el punto $x = q$, y sus términos forman una sucesión acotada ($|c_n q^n| \leqslant M$, $\forall n$). Por ello, para todo $x \in [-q_1, q_1]$ es válida

$$|c_n x^n| = \left| c_n q^n \left(\frac{x}{q}\right)^n \right| \leqslant M \left(\frac{q_1}{q}\right)^n,$$

donde $q_1/q < 1$.

Vemos que una serie de potencias es provechosa cuando se emplea para el cálculo de los valores de las funciones $f(x)$ en los puntos ubicados estrictamente dentro del intervalo de convergencia.

En cambio, si el punto x es uno de los extremos del intervalo $(-R, R)$, entonces en el punto citado, si la serie converge, lo hace a menor velocidad en comparación con una progresión geométrica decreciente. La convergencia en este caso es, de modo corriente tan lenta que resulta inconveniente emplear directamente la serie de potencias (1) para calcular los valores de f en el punto extremo citado. Ilustremos estos hechos con los ejemplos concretos.

Empecemos por el *cálculo del número* π.

En el § 9.12 (ejemplo 1) fue probado que

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \quad (-1 < x < 1). \tag{2}$$

En el punto $x = 1$ esta serie es también convergente. Demostremos que ella converge precisamente hacia $\operatorname{arctg} 1 = \pi/4$. En el § 9.12 esta afirmación no se ha demostrado.

Examinemos una identidad

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

Integrando esta identidad en $[0, 1]$, tenemos

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = \int_0^1 dx - \int_0^1 x^2\,dx + \dots$$

$$\dots + (-1)^n \int_0^1 x^{2n}\,dx + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\,dx =$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \alpha_n,$$

donde

$$\alpha_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\, dx.$$

Es fácil ver que

$$|\alpha_n| \leqslant \int_0^1 x^{2n+2}\, dx = \frac{1}{2n+3} \to 0, \quad n \to \infty.$$

De aquí se deduce que

$$\left| \operatorname{arctg} 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \right| \to 0, \quad n \to \infty,$$

es decir, arctg 1 constituye la suma de la serie

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

o bien

$$\pi = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}. \qquad (3)$$

Vemos que esta serie converge más lentamente que cualquier progresión geométrica decreciente.

Para calcular el número π por medio de la serie (3) con un error inferior a 10^{-6}, se deben tomar tantos sumandos de la serie (3) que el resto fuera inferior a 10^{-6}. Como la serie (3) es una serie de Leibniz, su resto es menos del módulo de su primer término

$$|R_n| = \left| 4 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \right| < \frac{4}{2n+3}.$$

De aquí se ve que, para $n = 2\cdot 10^6$, $|R_n| < 10^{-6}$. De este modo, se deben tomar dos millones de sumandos de la serie (3), para que se garantice el valor de π con la precisión requerida.

Sería un absurdo realizar este trabajo a mano. Se puede hacerlo con ayuda de una máquina computadora, pero incluso ésta última no asegurará el trabajo productivo, si se emplea la serie (3).

Indiquemos una serie que converge hacia el número π con mayor rapidez. Con este fin examinemos un número α tal que

$$\operatorname{tg} \alpha = 1/5.$$

Entonces

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1-\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2/5}{1-1/25} = \frac{5}{12},$$

$$\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} 2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha} = \frac{120}{119},$$

$$\operatorname{tg}\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} 4\alpha - \operatorname{tg}(\pi/4)}{1+\operatorname{tg} 4\alpha \cdot \operatorname{tg}(\pi/4)} = \frac{1}{239}.$$

De aquí

$$4\alpha - \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}(1/239),$$

$$\pi = 16\alpha - 4\operatorname{arctg}(1/239) = 16\operatorname{arctg}(1/5) - 4\operatorname{arctg}(1/239).$$

Haciendo uso, ahora, de la serie (2), obtenemos

$$\pi = 16 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\, 5^{2k+1}} - 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\, 239^{2k+1}}.$$

Las dos últimas series convergen lo suficientemente rápido (más rápido que una progresión geométrica decreciente).

Es fácil comprobar que el resto de la primera serie es inferior a 10^{-6} ya para $n = 4$. Por eso, al calcular los cuatro sumandos de la primera serie y dos sumandos de la segunda (con una exactitud de hasta el séptimo signo), obtendremos, como resultado:

$$\pi \approx 3{,}141592,$$

con la particularidad de que los primeros cinco signos decimales son exactos.

Cálculo de logaritmos

Una serie de Taylor para la función $y = \ln(1 + x)$ puede obtenerse integrando una identidad

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \quad (|x| < 1),$$

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \qquad (4)$$

Para $x = 1$, esta serie es convergente y converge ella hacia ln 2.

En efecto, integrando la identidad

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x}$$

dentro de [0, 1], obtenemos

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n+1} + \beta_n,$$

donde

$$|\beta_n| = \left| \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\, dx \right| \leqslant \int_0^1 x^{n+1}\, dx = \frac{1}{n+2} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Cuando $x = 1$, la serie (4), al igual que también la serie (3), converge lentamente.

Al sustituir en (4) x por $-x$, obtenemos

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}. \tag{5}$$

Sustrayendo (5) de (4), tenemos

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}. \tag{6}$$

Precisamente esta igualdad se usa para el cálculo de los logaritmos de los números naturales. Por ejemplo, suponiendo $x = 1/3$, obtenemos

$$\ln 2 = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)\, 3^{2k+1}}, \tag{7}$$

donde la convergencia de la serie en el segundo miembro es incluso más rápida que la de una progresión geométrica.

Para calcular $\ln 2$ con un error inferior a 10^{-5} es suficiente tomar cinco sumandos de la serie (7):

$$\ln 2 \approx 0{,}693146$$

(cada sumando de la serie calculamos con seis signos tras la coma).

En general, suponiendo $x = \frac{1}{2m+1}$, m es un número natural, obtendremos

$$\begin{gathered} \frac{1+x}{1-x} = \frac{m+1}{m}, \\ \ln(m+1) = \ln m + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)(2m+1)^{2k+1}} \end{gathered} \tag{8}$$

Suponiendo sucesivamente $m = 2, 3, \ldots$, hallamos $\ln 3$, $\ln 4$, ... La serie en el segundo miembro de (8) converge muy rápidamente.

Cálculo de las raíces

La serie de Taylor para la función $f(x) = (1+x)^{\alpha}$ se ha obtenido en el § 4.16:

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k. \qquad (9)$$

La serie (9) se denomina *binomial*. Se sabe que la serie (9) no siempre es convergente cuando $x = \pm 1$, pero si converge, la convergencia es lenta. Por eso, si, por ejemplo, hace falta calcular $\sqrt{2}$, no es racional aprovechar la fórmula (9) para $x = 1$, $\alpha = 1/2$. Resulta más conveniente el procedimiento siguiente. La expresión subradical se transforma, habitualmente, de una manera tal que se diferencie poco de la unidad:

$$\sqrt{2} = \sqrt{\frac{2\cdot 25\cdot 49}{25\cdot 49}} = \frac{7}{5}\sqrt{\frac{50}{49}} = \frac{7}{5}\left(1+\frac{1}{49}\right)^{1/2},$$

o bien

$$\sqrt{2} = \frac{7}{5}\frac{1}{\sqrt{49/50}} = \frac{7}{5}\left(1-\frac{1}{50}\right)^{-1/2} = \frac{7}{5}\left(1-\frac{2}{100}\right)^{-1/2}. \qquad (10)$$

Los números 25 y 49 se hallan del modo siguiente: escribimos los cuadrados de los números naturales

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, \ldots, \qquad (11)$$

y anotamos luego una línea de números que se obtienen multiplicando cada uno de los números en (11) por la expresión subradical, en el caso dado, por dos:

$$2, 8, 18, 32, 50, 72, 98, 128, \ldots. \qquad (12)$$

En las líneas (11) y (12) buscamos aquellos números cuya razón sea próxima a la unidad. Entre los números escritos los buscados serán precisamente 49 y $50 = 2\cdot 25$.

Si continuamos dichas líneas, podemos encontrar otro par de números próximos: 289 y 288, es decir,

$$\sqrt{2} = \sqrt{\frac{2\cdot 144\cdot 289}{144\cdot 289}} = \frac{17}{12}\sqrt{\frac{288}{289}} = \frac{17}{12}\left(1+\frac{1}{288}\right)^{-1/2}. \qquad (13)$$

Ahora ya podemos emplear la serie (9). Por ejemplo, en virtud de (13), para $x = 1/288$ tenemos

$$\sqrt{2} = \frac{17}{12}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}\frac{1}{288^k}. \qquad (14)$$

La serie en el segundo miembro de (14) converge muy rápidamente. Además, es alternada, es decir, el resto de la serie es inferior al módulo del primer término de este resto.

Escribamos la serie (14) en la forma desarrollada:

$$\sqrt{2}=\frac{17}{12}\left\{1-\frac{1}{2\cdot 288}+\frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!288^2}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!288^3}+\ldots\right\}. \quad (15)$$

El tercer miembro de la serie (15) es inferior a $8\cdot 10^{-6}<10^{-5}$, por lo cual

$$\sqrt{2}\approx\frac{17}{12}\left(1-\frac{1}{576}\right)=1{,}414207\ldots$$

con cuatro signos exactos.

Observemos que el cálculo de $\sqrt{2}$, partiendo de (10), es muy cómodo, pues, en el denominador obtenemos en seguida las potencias de 10. Si tomamos tres primeros términos de esta serie, entonces $\sqrt{2}\approx 1{,}41421$.

EJEMPLO 1. Calcúlese $\sqrt[3]{5}$ con un error inferior a 0,01.

Escribamos los cubos de los números naturales

$$1,\ 8,\ 27,\ 64,\ 125,\ 216,\ \ldots$$

y la fila de estos números multiplicados por 5:

$$5,\ 40,\ 135,\ 320,\ 625,\ 1080,\ \ldots.$$

De aquí

$$\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{\frac{5\cdot 27\cdot 125}{27\cdot 125}}=\frac{5}{3}\left(1+\frac{10}{125}\right)^{1/3}=\frac{5}{3}\left(1+\frac{8}{100}\right)^{1/3}=$$

$$=\frac{5}{3}\left\{1+\frac{8}{3\cdot 10^2}-\frac{2\cdot 8^2}{3^2\cdot 2!10^4}+\frac{2\cdot 5\cdot 8^3}{3^3\cdot 3!10^6}-\ldots\right\},$$

el tercer término de la serie

$$\frac{5\cdot 8^2}{3^3\cdot 10^4}<0{,}01,$$

por tanto

$$\sqrt[3]{5}\approx\frac{5}{3}\left(1+\frac{8}{300}\right)=1{,}71\ \ldots$$

con un error inferior a 0,01.

§ 9.15. Concepto de serie múltiple

Una expresión

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}a_{kl}, \quad (1)$$

donde a_{kl} son unos números (reales o complejos) dependientes de los pares de índices k, $l=0, 1, 2, \ldots$, se denomina *serie doble*.

Los números a_{kl} llevan el nombre de *términos de la serie*, mientras que los números

$$S_{mn}=\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}a_{kl}\quad (m,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{2}$$

se llaman *sumas parciales de la serie* (1).

Los pares de índices enteros no negativos $(k,\ l)$ pueden considerarse como los puntos de un plano de coordenadas enteras no negativas. Entonces, la suma parcial S_{mn} la integran los términos de la serie (1) con índices correspondientes a los puntos $(k,\ l)$ de un rectángulo $[0\leqslant k\leqslant m;\ 0\leqslant l\leqslant n]$ (véase la fig. 110). Debido a esta circunstancia las sumas parciales S_{mn} se llaman también *sumas parciales rectangulares de la serie* (1). La cantidad de los términos de la serie (1) en S_{mn} es igual a $N=(m+1)(n+1)$.

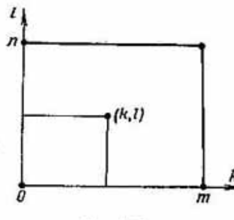


Fig. 110

Por definición, la serie (1) converge por rectángulos hacia el número S, llamado suma de la serie (1), si existe

$$\lim_{m,\ n\to\infty} S_{mn}=S, \tag{3}$$

es decir, si para todo $\varepsilon>0$ existe tal número $N_0(\varepsilon)$ que

$$|S_{mn}-S|<\varepsilon,$$

cualesquiera que sean $m,\ n>N_0(\varepsilon)$. En este caso se escribe

$$S=\sum_{k=0}\sum_{l=0}a_{kl}.$$

Analicemos el caso en que los términos de la serie (1) son números no negativos $(a_{kl}\geqslant 0)$. Pongamos

$$\Lambda=\sup_{m,n} S_{mn}. \tag{4}$$

Si $\Lambda<\infty$ es un número finito, para cualquier $\varepsilon>0$ se encontrará tal par $m_0,\ n_0$ que $\Lambda-\varepsilon<S_{m_0n_0}<\Lambda$, y, por ser a_{kl} no negativo,

$$S_{m_0n_0}\leqslant S_{mn},\ m,\ n>N_0=\text{máx}\,(m_0,\ n_0).$$

Por eso, $\Lambda-\varepsilon<S_{mn}<\Lambda+\varepsilon,\ m,\ n>N_0$ y existe un límite

$$\lim_{m,\ n\to\infty} S_{mn}=\Lambda_0.$$

En cambio, si $\Lambda = \infty$, entonces, evidentemente (para $a_{kl} \geqslant 0$), $\lim\limits_{m, n \to \infty} S_{mn} = \Lambda = \infty$. En este caso se escribe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} = \infty .$$

La serie (1) se llama *absolutamente convergente*, si converge (por rectángulos) la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} |a_{kl}| .$$

Al igual que en el caso de las series ordinarias, se demuestra que una serie absolutamente convergente converge. La demostración se basa en el criterio de Cauchy: para que la serie (1) converja, es necesario y suficiente que para todo $\varepsilon > 0$ exista un número $N(\varepsilon)$ tal que sea

$$| S_{mn} - S_{pq} | < \varepsilon ,$$

cualesquiera que sean $m, n, p, q > N(\varepsilon)$.

La argumentación del criterio de Cauchy es la misma que para las series ordinarias.

A la par con la serie (1) puede examinar una expresión

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} \Big) ,$$

a la que sería natural asignar un número A (si es que existe) que se obtiene del modo siguiente; si la serie encerrada entre paréntesis es convergente para todo $k = 0, 1, \ldots$ y tiene por suma A_k, y si la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k$ converge hacia el número A, suponemos

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} A_k = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} \Big) . \tag{5}$$

TEOREMA 1. *Si la serie* (1) *es absolutamente convergente, se verifica la igualdad*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} = \sum_{k=0}^{\infty} \Big(\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl} \Big) . \tag{6}$$

Demostración. Admitamos, al principio, que a_{kl} es no negativo. Supongamos que el primer miembro de (6) es igual al número S.

Para cualesquiera s y n no negativos tenemos, siendo $s \leqslant m$:

$$\sum_{l=0}^{n} a_{sl} \leqslant \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} a_{kl} \leqslant \quad , \tag{7}$$

de donde se ve que las series $\sum_{l=0}^{\infty} a_{sl}$ $(s = 0, 1, \ldots)$ convergen; por esta razón, si en la segunda igualdad de (7) fijamos m y pasamos al límite para $n \to \infty$, obtendremos

$$\sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl}\right) \leqslant S$$

para cualquier m, y de aquí se deduce la existencia del número A (véase (5)) y el hecho de que $A \leqslant S$.

Por otra parte, si el número A es finito, entonces

$$S_{mn} = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} a_{kl} \leqslant \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl}\right) \leqslant A,$$

cualesquiera que sean m, n, razón por la cual

$$S = \operatorname*{Sup}_{m,\, n} S_{mn} \leqslant A.$$

Queda demostrada la igualdad (6) para $a_{kl} \geqslant 0$.

Supongamos ahora que a_{kl} son unos números arbitrarios reales. Pongamos

$$a_{kl}^{+} = \begin{cases} a_{kl} & (a_{kl} \geqslant 0), \\ 0 & (a_{kl} < 0), \end{cases} \qquad a_{kl}^{-} = \begin{cases} -a_{kl} & (a_{kl} \leqslant 0), \\ 0 & (a_{kl} > 0). \end{cases}$$

Entonces

$$a_{kl} = a_{kl}^{+} - a_{kl}^{-}, \quad a_{kl}^{+} + a_{kl}^{-} = |a_{kl}|.$$

Por lo tanto de la convergencia de la serie $\Sigma\Sigma a_{kl}$ proviene la convergencia de las series $\Sigma\Sigma a_{kl}^{+}$, $\Sigma\Sigma a_{kl}^{-}$ de términos no negativos y por esta causa

$$\sum\sum a_{kl} = \sum\sum a_{kl}^{+} - \sum\sum a_{kl}^{-} = \\ = \sum_{k} \left(\sum_{l} a_{kl}^{+}\right) - \sum_{k} \left(\sum_{l} a_{kl}^{-}\right) = \sum_{k} \left(\sum_{l} a_{kl}\right).$$

Por fin, si $a_{kl} = \alpha_{kl} + i\beta_{kl}$ son unos números complejos y la serie $\Sigma\Sigma\, |a_{kl}|$ converge, entonces convergen también las series $\Sigma\Sigma\, |\alpha_{kl}|$, $\Sigma\Sigma\, |\beta_{kl}|$, donde α_{kl} y β_{kl} son los números reales, por eso

$$\sum\sum a_{kl} = \sum\sum \alpha_{kl} + i \sum\sum \beta_{kl} = \\ = \sum_{k} \left(\sum_{l} \alpha_{kl}\right) + i \sum_{k} \left(\sum_{l} \beta_{kl}\right) = \sum \left(\sum_{l} a_{kl}\right).$$

El teorema queda completamente demostrado.

EJEMPLO 1. Analícese para qué $\alpha > 0$ converge la serie doble

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (k+l)^{-\alpha}.$$

Resolución. En virtud del teorema 1, la investigación puede ser reducida a la convergencia de las series habituales (de multiplicidad unidad):

$$\sum_{l=1}^{\infty} (k+l)^{-\alpha} = A_k \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Como sabemos (véase el § 9.2, el teorema 2), la convergencia de la primera serie $\sum_{l=1}^{\infty} (k+l)^{-\alpha}$ es equivalente a la de una integral impropia $\int_0^{\infty} (k+y)^{-\alpha}\,dy$, la cual converge para $\alpha > 1$:

$$A_k = \sum_{l=1}^{\infty} (k+l)^{-\alpha} \leqslant \int_0^{\infty} (k+y)^{-\alpha}\,dy = \left.\frac{(k+y)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_0^{\infty} = \frac{k^{1-\alpha}}{\alpha-1} \qquad (\alpha > 1).$$

Luego,

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \leqslant \frac{1}{\alpha-1} \sum_{k=1}^{\infty} k^{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{1-\alpha}}{\alpha-1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha-1} \int_1^{\infty} x^{1-\alpha}\,dx.$$

La última integral converge para $\alpha - 1 > 1$, es decir, para $\alpha > 2$. Por eso, la serie de partida (doble) converge por rectángulos cuando $\alpha > 2$.

Examinemos un problema más. Supongamos que una serie doble (1) es convergente y, además, absolutamente. Su suma S, al igual que la suma S' de la serie formada de sus valores absolutos, puede anotarse en forma de los límites habituales de las sucesiones

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_0^n \sum_0^n a_{kl} = \lim_{n\to\infty} S_{nn}, \quad S' = \lim_{n\to\infty} \sum_0^n \sum_0^n |a_{kl}| = \lim_{n\to\infty} S'_{nn},$$

que dependen sólo del índice n. A las sucesiones $\{S_{nn}\}$, $\{S'_{nn}\}$ les corresponden las series convergentes

$$S = a_{00} + (a_{10} + a_{11} + a_{01}) + (a_{20} + a_{21} + a_{22} + a_{02}) + \\ + (a_{30} + \ldots) + \ldots, \qquad (8)$$

$$S' = |a_{00}| + (|a_{10}| + |a_{11}| + |a_{01}|) + \\ + (|a_{20}| + |a_{21}| + |a_{22}| + |a_{12}| + |a_{02}|) + \\ + (|a_{30}| + \ldots) + \ldots \qquad (9)$$

de términos iguales a las sumas de números que se encuentran entre paréntesis. Pero, entre paréntesis de la segunda serie figuran unos números no negativos, por lo tanto su convergencia no se altera, si tachamos en ella los paréntesis:

$$|a_{00}| + |a_{10}| + |a_{11}| + |a_{01}| + |a_{20}| + \ldots \qquad (10)$$

Mas, en este caso, la serie

$$a_{00} + a_{10} + a_{11} + a_{01} + a_{20} + \ldots \qquad (11)$$

obtenida por tachadura en (8) de todos los paréntesis, es absolutamente convergente y, por consiguiente, converge, evidentemente, hacia S.

Hemos probado que si la serie doble (1) converge hacia el número S, y, además, absolutamente, entonces la serie habitual (de multiplicidad unidad) (11), obtenida de (1), también converge hacia S y también absolutamente. Sabemos que los términos de una serie absolutamente convergente pueden permutarse de una manera cualquiera sin que se alteren su convergencia y su suma.

Con esto queda demostrado el siguiente teorema:

TEOREMA 2. *Si numeramos arbitrariamente con ayuda de un índice los términos de la serie doble* (1) ($v_0, v_1, v_2, \ldots$), *que converge hacia el número S, y, además, absolutamente, y formamos una serie $v_0 + v_1 + v_2 + \ldots$, entonces la última convergerá absolutamente hacia el mismo número S.*

Demostremos, además, el siguiente teorema:

TEOREMA 3. *Sean dadas dos series absolutamente convergentes (de multiplicidad unidad) $\sum_0^\infty u_k$, $\sum_0^\infty v_l$ y supongamos que toda clase de productos $u_k v_l$ ($k, l = 0, 1, 2, \ldots$) están numerados arbitrariamente con ayuda de un índice: $w_0, w_1, w_2, \ldots$. Entonces, es válida la igualdad*

$$\sum_0^\infty u_k \cdot \sum_0^\infty v_l = \sum_0^\infty w_k,$$

donde la serie a la derecha converge de modo absoluto.

Demostración. Efectivamente, supongamos que $\sum_0^\infty |u_k| = M$, $\sum_0^\infty |v_l| = N$. La serie doble $\sum_{k=0}^\infty \sum_{l=0}^\infty u_k v_l$ converge de modo absoluto, puesto que para cualesquiera m, n se tiene

$$\sum_0^m \sum_0^n |u_k v_l| = \sum_0^m |u_k| \cdot \sum_0^n |v_l| \leqslant M \cdot N.$$

Por lo tanto

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} v_l = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{l=0}^{n} v_l =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} u_k v_l = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} u_k v_l = \sum_{j=0}^{\infty} w_j,$$

donde la última igualdad se verifica debido al teorema antecedente.

Observemos en conclusión que pueden examinarse las series n-múltiples ($n \geqslant 3$)

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \ldots \sum_{k_n=0} a_{k_1, k_2, \ldots, k_n}.$$

Observación. Hemos introducido más arriba el concepto de sumas parciales rectangulares S_{mn} que contienen N términos de la serie (1) ($N = (m+1)(n+1)$). Cualquier suma compuesta por

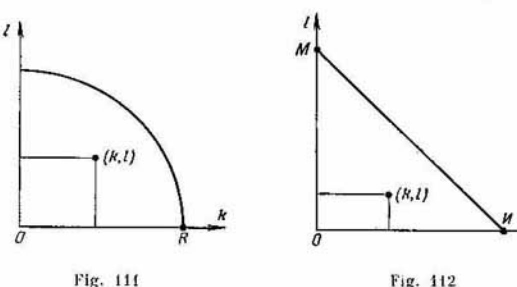


Fig. 111 Fig. 112

un número finito N de sumandos de la serie (1) suele llamarse también suma parcial de esta serie.

En el caso de la serie múltiple (1) las sumas parciales que contienen N términos de la serie y que se designarán con S_N pueden construirse de los modos diferentes. Podemos, por ejemplo, tomar una suma parcial que contenga los términos de la serie con índices k, l, correspondientes a los puntos de un plano (k, l) que pertenecen a un círculo de radio R y centro en el origen de coordenadas (fig. 111):

$$S_N = S_R = \sum_{k^2+l^2 \leqslant R^2} a_{kl}.$$

Cabe notar que los números N y R están ligados entre sí por medio de una relación $N = O(R^2)$ (se puede demostrar que la cantidad de los puntos (k, l) con coordenadas enteras ubicados dentro del círculo de radio R es proporcional al área de este círculo).

La suma S_R se llama *suma parcial circular* (esférica) de la serie (1).

Para una serie n-múltiple ($n \geqslant 3$) la suma esférica tiene por expresión

$$S_R = \sum_{k_1^2+\ldots+k_n^2 \leqslant R^2} a_{k_1 \ldots k_n}.$$

Si incluimos en la suma parcial los términos de la serie (1) con índices (k, l) satisfacientes la condición

$$0 \leqslant k + l \leqslant M \quad (k \geqslant 0,\ l \geqslant 0),$$

la suma parcial correspondiente $S_N = S_M$ ($N = 0\,(M^2)$) se llamará *suma parcial triangular* (véase la fig. 112) de la serie (1).

Según sea el carácter de las sumas parciales, podemos definir diferentes tipos de convergencia de la serie (1).

La serie (1) se denomina *convergente hacia el número S* por esferas, si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_0(\varepsilon)$ tal que para $R > N_0(\varepsilon)$ se cumple la desigualdad $|S_R - S| < \varepsilon$.

Análogamente se define la convergencia por triángulos. Es de interés la cuestión de cómo están ligados entre sí los diferentes tipos de convergencia de la serie múltiple (1), no obstante no nos detendremos en esto.

PROBLEMAS:

1. Investíguese para qué $\alpha > 0$ converge la serie triple (de multiplicidad tres)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (k+l+m)^{-\alpha}.$$

Respuesta: $\alpha > 3$.

2. Investíguese para qué $\alpha > 0$ converge la serie n-múltiple

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{k_n=1}^{\infty} (k_1 + \ldots + k_n)^{-\alpha}.$$

Respuesta: $\alpha > n$.

3. Investíguese para que $\alpha > 0$ converge la serie doble

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (k^2 + l^2)^{-\alpha}.$$

Respuesta: $\alpha > 1$.

4. Investíguese para qué α, β_1, β_2 converge la serie doble

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (k^{\beta_1} + l^{\beta_2})^{-\alpha}.$$

Respuesta: $\alpha > \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2}$.

5. Investíguese para que α, $\beta_1, \ldots, \beta_n > 0$ converge la serie n-múltiple

$$\sum_{k_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{k_n=1}^{\infty} (k_1^{\beta_1} + \ldots + k_n^{\beta_n})^{-\alpha}.$$

Respuesta: $\alpha > \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\beta_j}$.

§ 9.16. Adición de las series y de las sucesiones

Sean dadas una serie numérica

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots \tag{1}$$

y una sucesión de sus sumas parciales

$$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n. \tag{2}$$

La serie (1) puede ser convergente o divergente.

Una sucesión

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} [S_0 + S_1 + \ldots + S_n] \quad (n = 0,\ 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

lleva el nombre de sucesión de *medias aritméticas* de la sucesión $\{S_n\}$ o de la serie (1). Es fácil calcular que

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) u_k.$$

De este modo, los términos de la suma σ_n se difieren de los términos correspondientes de la suma parcial de la serie (1) en lo que los últimos se multiplican por los números $\lambda_k = 1 - \frac{k}{n+1}$ que son inferiores a la unidad. Por eso, si la sucesión $\{S_n\}$ diverge, puede ocurrir que, a pesar de eso, la sucesión $\{\sigma_n\}$ sea convergente.

Por definición, la serie (1) (o bien la sucesión $\{S_n\}$) se adiciona por el método de medias aritméticas hacia el número σ, siempre que existe un límite

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = \sigma.$$

TEOREMA. *Si una serie* (1) *converge hacia el número S, se suma por el método de medias aritméticas, y, además, hacia el mismo número S.*

Demostración. Supongamos que la serie (1) converge; entonces existen un número M tal que

$$|S_j| \leqslant M \quad (j = 0, 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

y un número natural n, suficientemente grande que se considerará fijo (mientras que k y, en lo sucesivo, p, se considerarán variables) que

$$|S_{n+k} - S| < \varepsilon \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Luego, tenemos

$$S-\sigma_{n+p}=\left(S-\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} S_{n+k}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{n+p+1}\right)\sum_{k=1}^{p} S_{n+k}-\frac{1}{n+p+1}\sum_{k=0}^{n} S_k=$$
$$=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}(S-S_{n+k})+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{n+p+1}\right)\sum_{k=1}^{p} S_{n+k}-$$
$$-\frac{1}{n+p+1}\sum_{k=0}^{n} S_k,$$

de donde, al tomar en consideración que

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{n+p+1}=\frac{n+1}{p(n+p+1)},$$

obtenemos

$$|S-\sigma_{n+p}|<\varepsilon+\frac{n+1}{n+p+1}M+\frac{n+1}{n+p+1}M<\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon \; (p>P_0),$$

si P_0 es suficientemente grande. Por consiguiente, $\sigma_{n+p} \to S$ $(p \to \infty)$ o bien, que es igual, $\sigma_j \to S$ $(j \to \infty)$, es decir, el teorema es cierto.

EJEMPLO 1. Examinemos una serie convergente $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 2$. Aquí,

$$S_0=1,\; S_1=1+\frac{1}{2},\; \ldots,\; S_n=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}=2-\frac{1}{2^n}.$$

De aquí

$$\sigma_n=\frac{1}{n+1}[S_0+\ldots+S_n]=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(2-\frac{1}{2^k}\right)=$$
$$=\frac{1}{n+1}\left[2(n+1)-1+\frac{1}{2^n}\right]=2-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2^n(n+1)}\to 2 \quad (n\to\infty).$$

EJEMPLO 2. La serie $1 - 1 + 1 - \ldots$ diverge, pero se suma hacia el número 1/2 por el método de medias aritméticas.

En efecto, para la serie dada $S_0 = 1$, $S_1 = 0$, ..., $S_{2n} = 1$, $S_{2n+1} = 0$, ...

Por lo tanto

$$\sigma_{2n} = \frac{1}{2n+1}[S_0 + \ldots + S_{2n}] = \frac{1}{2n+1}[1 + 0 + \ldots + 0 + 1] = \\ = \frac{n+1}{2n+1} \to \frac{1}{2}, \quad n \to \infty;$$

$$\sigma_{2n} = \frac{1}{2n+2}[S_0 + \ldots + S_{2n} + S_{2n+1}] = \frac{n+1}{2(n+1)} = \frac{1}{2}, \quad n \to \infty.$$

Indice alfabético